

временного ряда будет равно текущему). Точность наивного прогнозирования часто используется в качестве референсного значения при оценке других методов прогнозирования. В данном случае удалось повысить точность на 0,54 п.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and control. 1965. Vol. 8. P. 338-353.
2. *Song Q., Chissom B. S.* Forecasting enrollments with fuzzy time series. Part I // Fuzzy sets and systems. 1993. Vol. 54. № 1. P. 1-9.
3. *Song Q., Chissom B. S.* Forecasting enrollments with fuzzy time series. Part II // Fuzzy sets and systems. 1994. Vol. 62. № 1. P. 1-8.
4. *Song Q., Chissom B. S.* Fuzzy time series and its models // Fuzzy sets and systems. 1993. Vol. 54. № 3. P. 269-277.
5. *Мамедова М. Г., Джабраилова З. Г.* Нечеткая логика в прогнозировании демографических аспектов рынка труда // Искусственный интеллект. 2005. № 3. С. 450-460.
6. *Sasu A.* An application of fuzzy time series to the Romanian population // Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Mathematics, informatics, physics. 2010. Vol. 3 (52). Series III. P. 125-132.
7. *Boaisha S. M., Amaitik S. M.* Forecasting model based on fuzzy time series approach. [Electronic resource]. URL:<http://itpapers.info/acit10/Papers/f654.pdf> (date of access: 02.08.2016).
8. *Дегтярев К. Ю.* Прогнозирование валютных котировок с использованием модифицированного стационарного метода, основанного на нечетких временных рядах [Электронный ресурс]. URL:<http://www.exponenta.ru/educat/news/degtyarev/paper2.pdf> (дата обращения 03.08.2016).
9. *Saxena P., Sharma K., Easo S.* Forecasting enrollments based on fuzzy time series with higher forecast accuracy rate // International journal Computer technology & applications. 2012. Vol. 3. P. 957-961.
10. *Saxena P., Shrivastava S., Bundela A. S.* A new method for population forecasting based on fuzzy time series with higher forecast accuracy rate // International journal of engineering sciences & research technology. 2015. Vol. 4. P. 559-564.
11. *Shcherbakov M. V., Brebels A., Shcherbakova N. L., Tyukov A. P.* A survey of forecast error measures. World Applied Sciences Journal (Information Technologies in Modern Industry, Education & Society). 2013. Vol. 24. P. 171-176.
12. *Пилюгина А. В., Бойко А. А.* Опыт использования аппарата нечетких множеств в прогнозировании валютного курса // Прикаспийский журнал : Управление и высокие технологии. 2014. № 3 (27). С. 143-157.

КРАТКОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДОХОДНОСТИ АГРЕССИВНОГО ИНДЕКСА ПЕНСИОННЫХ НАКОПЛЕНИЙ (RUPAI) ПО ВИНЕРУ И БАЙЕСУ

А. А. Быкова, А. Д. Иванова

*ООО «Интер Контракт», Самара, Россия
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Россия
E-mail: alisa-bykva@mail.ru, hudoj-nik@mail.ru*

В работе предложены модели динамики агрессивного индекса пенсионных накоплений (RUPAI) и методики его прогнозирования, основывающиеся на методах Байеса и Винера

ра. Приводятся пошагово способы построения базовой модели и её оценивания. Предлагается сравнение результатов краткосрочного прогнозирования, полученных по двум методикам на данных доходности индекса RUPAI за июль 2016 года. Данный анализ может быть интересен частным управляющим компаниям, которые формируют свои портфели с использованием средств пенсионных накоплений.

SHORT-TERM FORECASTING RETURN INDEX AGGRESSIVE PENSION ASSETS (RUPAI) BY METHODS OF WIENER AND BAYES

A. A. Vykova, A. D. Ivanova

In this paper we propose models of the dynamics of aggressive index of pension accumulations (RUPAI) and techniques of its prediction based on methods of Bayes and Wiener. We provide step by step methods for constructing the base model and its evaluation. We offer a comparison of short-term forecasting obtained by the two techniques on data profitability at RUPAI-index during July 2016. This analysis may be of interest to private management companies, whose portfolios are formed using pension assets.

Индексы рынка пенсионных накоплений представляют собой композитные индексы акций и облигаций, допущенных к обращению на Бирже, и в которые могут инвестироваться средства пенсионных накоплений [1]. Индексы отражают три возможные стратегии инвестирования в зависимости от класса активов – консервативную, сбалансированную и агрессивную [2, 3]. В структуре агрессивного индекса (RUPAI) 55% составляет субиндекс облигаций российских корпоративных эмитентов и 45% – субиндекс акций российских эмитентов. При расчете RUPAI не учитывается субиндекс облигаций федеральных займов России [4].

Для построения модели определим величину r_t как доходность индекса после удаления тренда [5], то есть, $r_t = \ln(I_t / I_{t-1}) - T_t$. В качестве тренда был выбран полином 3-й степени $T_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$ коэффициенты которого оценивались по стандартной методике МНК $\alpha_0 = 1505,4$, $\alpha_1 = 7,00072$, $\alpha_2 = -0,691$, $\alpha_3 = 0,0179$. Автокорреляционные функции оценивались на основе фактических данных

$$R(k) = \frac{\sum_{t=0}^{T-k} (r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r})}{\sum_{t=0}^T (r_t - \bar{r})^2}$$

Таблица 1

Значение параметров

k	1	2	3	4	5	6	7	8
R(k)	0,212	0,047	0,030	-0,019	-0,008	-0,113	-0,088	-0,165

Как можно видеть значимым $R(k)=AKF(k)$ являются первые два коэффициента для $k=1,2$, что свидетельствует о наличии части ВР типа МА(2). Отметим, что $R(k=2)$ на порядок меньше $R(k=1)$, что позволяет выдвинуть гипотезу и о наличии только части МА(1) [6]. Кроме того, ряд не обрывается резко, то есть ВР содержит также и составляющую типа AR(p). Порядок AR(p) определяется по значениям частной автокорреляционной функции $R_{ch}(k)=ЧАКФ(k)$. С помощью МНК находим

$$\text{ЧАКФ}(k) = \phi_{kk}.$$

Таблица 2

Значение параметров

K	1	2	3	4	5	6	7	8
R_ch(k)	0,212	0,121	0,031	-0,025	0,006	-0,115	-0,012	-0,014

Как можно видеть из таблицы 2, отличны от нуля первые два значения ЧАКФ(k), что свидетельствует о наличии у ВР составляющей AR(2), то есть, наличия не более двух слагаемых x_{t-1}, x_{t-2} . Таким образом, можно сделать предположение о модели ВР типа ARMA(2,1).

Для оценки параметров модели ARMA(2,1) используем метод Бокса–Дженкинса с оператором сдвига назад $B r_t = r_{t-1}$, $B \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$ [7]. Введем новую

случайную величину $Z_t = \frac{1}{1 - b_1 B - b_2 B^2} \varepsilon_t$. Зададим начальные значения коэф-

фициента c_1 и, из последнего уравнения, последовательно находим величины Z_t . На основе полученных значений Z_t строим регрессию из выражения

$$Z_t = \frac{1}{1 - b_1 B - b_2 B^2} \varepsilon_t, \quad (1 - b_1 B - b_2 B^2) Z_t = \varepsilon_t.$$

Оценки коэффициентов регрессии \hat{b}_1, \hat{b}_2 находим с помощью МНК.

Далее, исходя из уравнения: $r_t = b_1 r_{t-1} + b_2 r_{t-2} + \varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1}$, вычисляем остатки $e_i, i = 1, 2, \dots, N$: $x_k = \hat{b}_1 x_{k-1} + \hat{b}_2 x_{k-2} + e_k + \hat{c}_1 e_{k-1} \rightarrow e_k = x_k - \hat{b}_1 x_{k-1} - \hat{b}_2 x_{k-2} - \hat{c}_1 e_{k-1}$. Минимизируем сумму квадратов остатков $S = \sum_{t=1}^N e_t^2$ за счет изменения c_1 , тогда

оцененная модель ARMA(2,1) имеет вид:

$$r_t = -0,62323 r_{t-1} + 0,136793 r_{t-2} + \varepsilon_t + 0,849224 \varepsilon_{t-1}.$$

Для проверки качества модели ARMA(2,1) применим статистику Льюнга–Бокса: $Q(m) = N(N+2) \sum_{j=1}^m \frac{1}{N-j} \cdot r e_j^2 = 15,1$. Эта статистика имеет распределе-

ние $\chi^2(m-p-q) = \chi^2(10-2-1)$ с 7-ю степенями свободы: $\chi^2_{\text{табл}}(0,01;7) = 18,5$. Так как фактическое значение меньше $Q(7) = 15,1 < 18,5$, то модель можно признать удовлетворительной.

При прогнозировании по Байесу вычисляем математическое ожидание $r_N[k] = E(r_{N+k} | r_1, r_2, \dots, r_N)$. При этом величины r_t заменяем фактическими значениями для $t \leq N$ и оценками $r_t = r_N[k = N - t]$.

Для каждого момента t рекуррентно вычисляем остатки $e_1 = r_1$; $e_2 = r_2 - b_1 r_1 - c_1 e_1$; $e_3 = r_3 - b_1 r_2 - b_2 r_1 - c_1 e_2$; $e_t = r_t - b_1 r_{t-1} - b_2 r_{t-2} - c_1 e_{t-1}$.

Случайные величины ε_t заменяем вычисленными остатками e_t и нулями для $t+k$ [8]. Для каждого момента времени вычисляем прогноз на 1, 2 и 3 шага: $r_t[1] = b_1 r_t + b_2 r_{t-1} + c_1 e_t$; $r_t[2] = b_1 r[1]_t + b_2 r_t$; $r_t[3] = b_1 r[2]_t + b_2 r_t[1]$. Аналогично

поступаем в случае прогноза для $t > N = T$.

Для прогнозирования по Винеру необходимо иметь значения для ковариаций γ_k через параметры модели, считая их известными после этапа оценки параметров. Модель Винера имеет вид:

$$\hat{x}_N(k) = W^T \bar{x}_N,$$

здесь $\bar{x}_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ - вектор-столбец значений ряда r_t . Матрица $W(N, N)$ дается выражением:

$$W(k) = G^{-1} \cdot g(k).$$

где матрица ковариаций $G(N, N)$, а вектор-столбец $g(k)$ зависит от глубины прогноза k .

Ковариации находим из уравнения:

$$r_t = b_1 r_{t-1} + b_2 r_{t-2} + \varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + E(r_t \cdot (\varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1})); \\ \gamma_1 &= b_1 \gamma_0 + b_2 \gamma_1 + E(x_{t-1} \cdot (\varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1})); \end{aligned}$$

Учитывая вышеприведенные соотношения, получим систему уравнений для γ_0, γ_1 , где $\gamma_2 = b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_0$:

$$\begin{aligned} (1 - b_2^2) \gamma_0 - b_1(1 + b_2) \gamma_1 &= d_0 \sigma_\varepsilon^2; \\ -b_1 \gamma_0 + (1 - b_2) \gamma_1 &= d_1 \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Таблица 3

Значение параметров

b_1	b_2	c_1	σ_ε^2
-0,62323	0,136793	0,849224	10,4756%.

Значения γ_0, γ_1 даются выражениями:

$$\gamma_0 = \Delta(\gamma_0) / \Delta; \gamma_1 = \Delta(\gamma_1) / \Delta,$$

здесь $\Delta = (1 - b_2^2)(1 - b_2) - b_1^2(1 + b_2)$;

$$\Delta(\gamma_0) = [(1 - b_2)d_0 + b_1(1 + b_2)d_1] \cdot \sigma_\varepsilon^2;$$

$$\Delta(\gamma_1) = [(1 - b_2^2)d_1 + b_1 d_0] \cdot \sigma_\varepsilon^2.$$

Численно, для γ_0, γ_1 имеем: $\gamma_0 = \sigma_x^2 = 0,0011561$; $\gamma_2 = 0,002449$. Остальные $\gamma(k)$ можно вычислять рекуррентно $\gamma_k = b_1 \gamma_{k-1} + b_2 \gamma_{k-2}; k \geq 2$.

Имеем значения корней: $z_1 = 0,172014$; $z_2 = 0,795242$. Общее решение уравнения $\gamma_k = b_1 \gamma_{k-1} + b_2 \gamma_{k-2}; k \geq 2$ имеет вид $\gamma_k = A \cdot z_1^k + B \cdot z_2^k$. Граничные условия дают систему уравнений для определения коэффициентов A, B

$$\gamma_0 = A + B; \quad \gamma_2 = A \cdot z_1 + B \cdot z_2. \quad \text{Отсюда находим: } A = \frac{\gamma_0 z_2 - \gamma_1}{z_2 - z_1} = 0,012037;$$

$$B = \frac{\gamma_1 - \gamma_0 z_1}{z_2 - z_1} = 0,000476. \quad \text{Таким образом, значения } \gamma_k \text{ даются выражениями:}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{z_2 - z_1} (\gamma_0 z_2 - \gamma_1) z_1^k + \frac{1}{z_2 - z_1} (\gamma_1 - \gamma_0 z_1) z_2^k, \quad k \geq 2.$$

Также можно использовать вместо ковариаций коэффициенты корреляции, учитывая, что: $\gamma_k = \gamma_0 r_k$. Тогда: $\gamma_k = \frac{\gamma_0}{z_2 - z_1} ((z_2 - r_1) z_1^k + (r_1 - z_1) z_2^k)$. При этом коэффициент корреляции r_1 с учетом того, что $r_k = \gamma_k / \gamma_0$ имеет значения: $r_1 = 0,211823$. Формируем вектор W^T . Матрица $W(N, N)$ дается выражением:

$$W(k) = G^{-1} \cdot g(k),$$

здесь $G(N, N)$ - симметричная матрица, а вектор-столбец $g(k)$ зависит от глубины прогноза k .

Выражение $\hat{x}_N[k] = W(k)^T \bar{x}_N$, где $\bar{x}_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ - вектор-столбец фактических значений ряда r_t может быть переписано в виде:

$$\hat{x}_N[k] = (G^{-1} g(k))^T \bar{x}_N = g^T(k) (G^T)^{-1} \bar{x}_N = \bar{x}_N^T (G)^{-1} g(k) = \bar{x}_N^T \cdot \bar{y}(k).$$

Для вычисления вектора $\bar{y}(k)$ большой размерности удобно применять метод Холецкого [9]. В этом случае матрицу G представим в виде произведения нижней треугольной матрицы B и верхней треугольной матрицей C с единичной диагональю, то есть: $G = B \cdot C$. Введем вектор $z = C \bar{y}$. Тогда искомым вектор \bar{y} может быть вычислен из цепочки уравнений:

$$G \cdot \bar{z}(k) = \bar{g}(k) \rightarrow B \cdot \bar{z}(k) = \bar{g}(k); C \bar{y}(k) = \bar{z}(k).$$

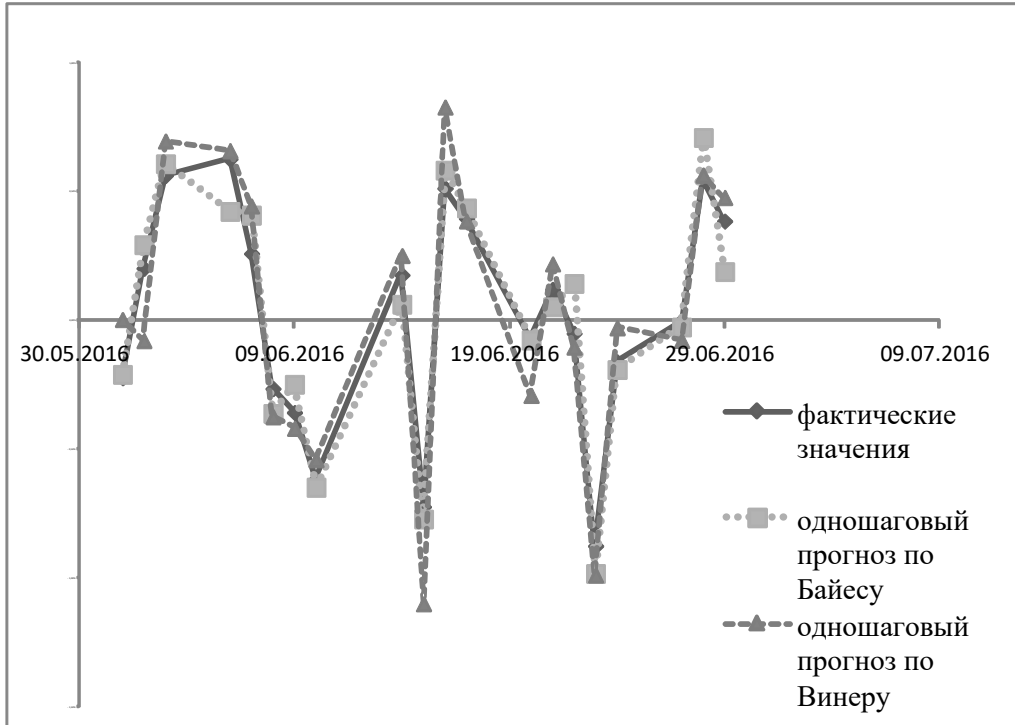


Рис. Графики одношаговых прогнозных значений, полученные по Байесу, Винеру и фактические значения

Так как матрицы B и C треугольные [10], то система легко решается:

$$z_1 = g_1 / b_{11};$$

$$z_i = \frac{1}{b_{ii}} \left(g_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} z_k \right); i > 1.$$

После определения вектора z находим вектор \bar{y} из уравнения $z = C\bar{y}$. Так как матрица C - верхняя треугольная, то вычислительная схема имеет вид:

$$y_N = z_N; y_i = z_i - \sum_{k=i+1}^N c_{ik} z_k, i < N.$$

Как можно видеть, прогнозы по Байесу и Винеру дают практически совпадающие результаты, но прогнозы по Байесу лучше. Результаты работы могут быть применены в целях прогнозирования доходности активов на рынке ценных бумаг и в задачах портфельного инвестирования и легко автоматизированы инструментами VBA Excel.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2781.2012.2) и РФФИ (проект 12-07-00057).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федотов Д. Ю., Будько С. А. Анализ доходности инструментальных сегментов финансового рынка доступных для размещения средств пенсионных накоплений // Вестник Забайкальского государственного университета. 2016. Т. 22. №. 2. С. 129-141.
2. Абрамов А. Е., Чернова М. И. Анализ эффективности портфелей негосударственных пенсионных фондов и паевых инвестиционных фондов в Российской Федерации // Глобальные рынки и финансовый инжиниринг. 2015. №. 1. С. 26-44.
3. Трегуб А. В., Трегуб И. В. Методика прогнозирования основных показателей развития отраслей российской экономики // Вестник Московского государственного университета леса–Лесной вестник. 2014. Т. 18. №. 4 (104). С. 144-152.
4. Туманянц К. А., Утученкова М. В. Анализ качества инвестирования пенсионных накоплений в России с использованием бэнчмарк-метода // Финансовая аналитика: проблемы и решения. 2014. №. 24. С. 44-56.
5. Борусяк К. К. Нелинейная динамика российского фондового рынка в задачах риск-менеджмента // Исследование российской экономики. Вопросы экономической политики. 2011. С. 85-105.
6. Игнатов Н. А. Прогнозирование временных рядов с регулярными циклическими компонентами с помощью модели периодически коррелированных случайных процессов // Научные труды: Институт народнохозяйственного прогнозирования РАН. 2011. №. 9. С. 461 – 477.
7. Box G. Box and Jenkins: time series analysis, forecasting and control // A Very British Affair. – Palgrave Macmillan UK, 2013. С. 161-215.
8. Ситников Д. В. Прогнозирование временных рядов модели Minority Game с помощью метода Байеса // ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ молодежной научной конференции. – С. 38.
9. Писаренко О. К., Русаков Р. Р. Скоростное решение системы линейных алгебраических уравнений большой размерности методом Холецкого // Вопросы радиоэлектроники, серия ЭВТ. 2012. №. 2. С. 82-87.
10. Ko K. Y., Son Y. S. Optimal portfolio and VaR of KOSPI200 using One-factor model // Journal of the Korean Data and Information Science Society. 2015. Т. 26. №. 2. С. 323-334.