4. *Grubbs F. E.* Sample criteria for testing outlying observations // Annals of Mathematical Statistics. 1950. № 21 (1). P. 27–58.

5. *Сошникова Л. А., Тамашевич В. Н., Уебе Г., Шеффер М.* Многомерный статистический анализ в экономике : учеб. пособие для вузов. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 1999. 598 с.

6. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика для инженеров и научных работников. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

7. *Шуленин В. П.* Математическая статистика. Ч. 3. Робастная статистика : учебник. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. 520 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ СУММЫ ЕДИНОВРЕМЕННЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ В МОДЕЛИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СТРАХОВЫМ ПОЛЕМ

Д. Д. Даммер

Томский государственный университет, Россия
E-mail: di.dammer@yandex.ru

Данная работа посвящена исследованию модели страховой компании в виде системы массового обслуживания при условии ограниченного страхового поля. Рассматривается двумерный случайный процесс числа рисков, застрахованных в компании и числа единовременных страховых выплат, а также величина общей суммы таких выплат. Методом характеристических функций найдено распределение рассматриваемой величины. Также получены выражения для математического ожидания и дисперсии величины общей суммы единовременных страховых выплат.

RESEARCH OF THE TOTAL AMOUNT OF ONE-TIME INSURANCE PAYMENTS IN MODEL WITH LIMITED INSURANCE COVERAGE

D. D. Dammer

This paper is devoted to the research of the model of insurance company in the form of queueing system with limited insurance coverage. Two-dimensional stochastic process of a number of risks that are insured in the company and a number of one-time insurance payments, and value of the total amount of payments are reviewed. Using method of characteristic function we got probability distribution of this value. We also obtain expressions for the expected value and dispersion of the total amount of one-time insurance payments.

Исследованию математических моделей экономических процессов и систем в настоящее время уделяется достаточное большое внимание. В работах, связанных с моделированием деятельности страховых компаний находятся такие характеристики: вероятность разорения, математическое ожидание капитала и числа, застрахованных в компании рисков и др. Так в работе [1,2] находятся вышеперечисленные характеристики функционирования страховой компании с различными потоками входящих рисков. В [3] решается задача оптимизации расходов на рекламную кампанию, когда критерием оптимальности выступает максимизация капитала. Также находятся условия эффективности рекламы. В работе [4] рассматривается модель с произвольной величиной продолжительности договора страхования и простейшим потоком входящих рисков. В [5] получено совместное распределение двумерного процесса числа застрахованных рисков и числа требований на выплату страховых сумм с учетом неявной рекламы. В данной же работе рассматривается модель с учетом ограниченного страхового поля [6] и исследуется такая характеристика, как общая сумма единовременных страховых выплат.

Рассмотрим модель страховой компании с ограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов (рис.1). Обозначим N – максимально возможное число потенциальных рисков. За бесконечно малый промежуток времени каждый из N потенциальных рисков компании с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ может застраховаться. Риск не может быть застрахован повторно, если срок действующего договора не истек. Обозначим $i(t)$ – число застрахованных в компании рисков в момент времени t. Тогда поток рисков, приходящих в компанию, будет пуассоновским с параметром $(N - i(t))\lambda$. Срок действия договора страхования соответствует длительности обслуживания заявки на приборе. Каждый риск, находящийся в компании, во время действия договора страхования независимо от других рисков генерирует с интенсивностью γ требование на выплату страховой суммы. И эти требования также образуют простейший поток событий. Требование риска на выплату определяется наступлением страхового случая. После страхового случая риск получает единовременную выплату полной страховой суммы и покидает компанию. Величину продолжительности договора страхования для каждого риска, находящегося в компании, будем считать случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону с параметром μ.

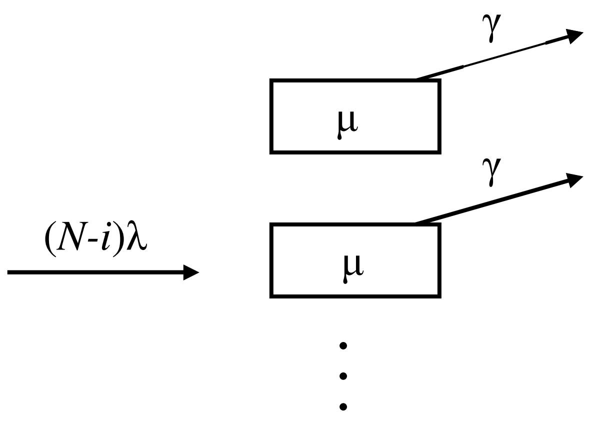

Рис. 1. Модель страховой компании с ограниченным страховым полем в виде системы массового обслуживания

Введем еще обозначения: $n(t)$ – число требований на выплату за интервал времени $[0, t]$, $P(i,n,t) = \mathrm{P}\{i(t) = i, n(t) = n\}$ – вероятность того, что в момент времени t в компании находится i застрахованных рисков, и число единовременных страховых выплат к этому же моменту составило *n.* Также обозначим: $S(t)$ – величину общей суммы единовременных страховых выплат по всем страховым случаям за интервал времени $[0,t]$, ξ – случайную величину выплаты по одному страховому случаю и $M\{\xi\}=a_1$, $M\{\xi^2\}=a_2$.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова [7] для распределения вероятностей $P(i,n,t)$:

$$P(i,n,t+\Delta t)=P(i,n,t)(1-(N-i)\lambda\Delta t-i\mu\Delta t-i\gamma\Delta t)+$$
$$+P(i-1,n,t)(N-(i-1))\lambda\Delta t+$$
$$+P(i+1,n,t)(i+1)\mu\Delta t+P(i+1,n-1,t)(i+1)\gamma\Delta t+o(\Delta t).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P(i,n,t)}{\partial t}=-P(i,n,t)(N\lambda+i\mu+i\gamma-i\lambda)+P(i-1,n,t)(N\lambda-(i-1)\lambda)+$$
$$+P(i+1,n,t)(i+1)\mu+P(i+1,n-1,t)(i+1)\gamma. \quad (1)$$

Для решения системы (1) определим характеристическую функцию

$$H(u,z,t)=\sum_{i,n=0}^{\infty}e^{iuj}e^{nzj}P(i,n,t),$$

где j – мнимая единица. Из системы (1) с учетом свойств характеристических функций получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $H(u,z,t)$:

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t}+j\left[\lambda-\lambda e^{ju}+\mu e^{-ju}+\gamma e^{jz}-\mu-\gamma\right]\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial u}=N\lambda\left(e^{ju}-1\right)H(u,z,t).$$

Решение этого дифференциального уравнения определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых [8], и с учетом начального условия

$$P(i,n,0)=\begin{cases}P(i),\ n=0,\\ 0,\quad n>0,\end{cases}$$

имеет вид

$$H(u,z,t)=e^{N\lambda v_2(z)t}\left[\left(1+\frac{\lambda}{\mu+\gamma}\right)(v_1(z)-v_2(z))\right]^{-N}\times$$
$$\times\left\{\left(v_1(z)-e^{ju}+1\right)\left[1+\frac{\lambda}{\mu+\gamma}(1+v_2(z))\right]-\right. \quad (2)$$
$$\left.-\left(v_2(z)-e^{ju}+1\right)e^{-\lambda(v_2(z)-v_1(z))t}\left[1+\frac{\lambda}{\mu+\gamma}(1+v_1(z))\right]\right\}^N.$$

В (2) $v_1(z)$ и $v_2(z)$ определяются выражениями:

$$v_{1,2}(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\gamma}{\lambda}\right)\pm\frac{\sqrt{D(z)}}{2},\ \ D(z)=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2-4\frac{\gamma}{\lambda}\left(1-e^{jz}\right)>0. \quad (3)$$

Таким образом, получили вид характеристической функции двумерного случайного процесса числа рисков, застрахованных в компании к моменту времени t и числа единовременных страховых выплат к этому же моменту.

Запишем выражение для характеристической функции процесса $n(t)$:

$$H(0,z,t)=F(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jzn}P(n,t)=e^{N\lambda v_2(z)t}\left[\left(1+\frac{\lambda}{\mu+\gamma}\right)(v_1(z)-v_2(z))\right]^{-N}\times$$

$$\times\left\{v_1(z)\left[1+\frac{\lambda}{\mu+\gamma}(1+v_2(z))\right]-v_2(z)e^{-\lambda(v_2(z)-v_1(z))t}\left[1+\frac{\lambda}{\mu+\gamma}(1+v_1(z))\right]\right\}^{N}. \quad (4)$$

Определим характеристические функции величин $S(t)$ и ξ:

$$g(\alpha,t)=M\left\{e^{-\alpha S(t)}\right\},\quad \varphi(\alpha)=M\left\{e^{-\alpha\xi}\right\}.$$

Для $g(\alpha,t)$ можем записать:

$$g(\alpha,t)=M\left\{e^{-\alpha S(t)}\right\}=M\left\{e^{-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n(t)}\xi_i}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}M\left\{e^{-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n(t)}\xi_i}\middle|n(t)=n\right\}P(n,t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}M\left\{\prod_{i=1}^{n(t)}e^{-\alpha\xi_i}\middle|n(t)=n\right\}P(n,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\alpha)P(n,t).$$

Таким образом, $g(\alpha,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\alpha)P(n,t)=G(\varphi(\alpha),t)$, причем $G\left(e^{j\varphi(\alpha)},t\right)=F(\varphi(\alpha),t)$, где функция $F(.)$ определяется выражением (4).

Сосчитаем математическое ожидание и дисперсию величины общей суммы единовременных страховых выплат. Так как

$$\left.\frac{\partial g(\alpha,t)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=-M\{S(t)\}\ \text{ и }\ \left.\frac{\partial^2 g(\alpha,t)}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}=M\left\{S^2(t)\right\},$$

то

$$M\{S(t)\}=\frac{N\lambda\gamma}{\mu+\gamma+\lambda}a_1t,$$

$$D\{S(t)\}=\frac{N\lambda\gamma}{\mu+\gamma+\lambda}a_2t+2\frac{N\lambda\gamma^2(\mu+\gamma)}{(\mu+\gamma+\lambda)^3}a_1^2t-$$

$$-2\frac{N\lambda\gamma^2(\mu+\gamma)}{(\mu+\gamma+\lambda)^4}a_1^2+2\frac{N\lambda\gamma^2(\mu+\gamma)}{(\mu+\gamma+\lambda)^4}a_1^2e^{-(\mu+\gamma+\lambda)t},$$

где величины a_1 и a_2 – первый и второй начальные моменты величины единовременной выплаты по одному страховому случаю.

Рассмотрим еще и коэффициент вариации величины $S(t)$ – характеристику, которая определяет разброс значений рассматриваемой случайной величины относительно ее математического ожидания:

$$V\{S(t)\}=\frac{\sqrt{D\{S(t)\}}}{M\{S(t)\}}.$$

С его помощью можно оценить, например, колеблемость величин суммарных страховых выплат по различным видам страхования или по одному виду, но в разное время. На рис. 2 изображен поведение коэффициента вариации

$V(t)$ величины $S(t)$ для следующих значений параметров: $a_1 = 10$, $a_2 = 120$, $\lambda = 0.7$, $\mu = 1$, $\gamma = 0.2$, $N = 1000$. Численные расчеты показывают, что с течением времени функция $V(t)$ существенно убывает, достигая значения 0.01 при $t = 27$. Эта информация может быть использована при прогнозировании величины капитала страховой компании.

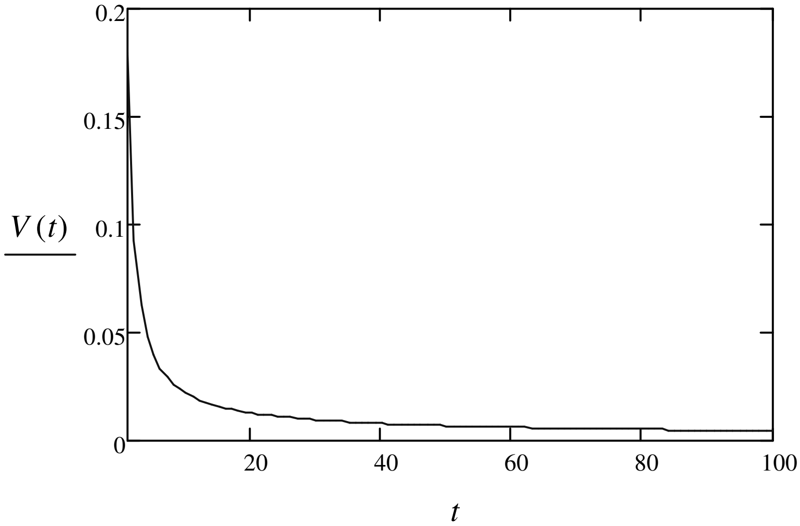

Рис. 2. Изменение коэффициента вариации
величины *S(t)* в зависимости от времени

Таким образом, в данной работе исследуется величина общей суммы единовременных страховых выплат за некоторый интервал времени. Найдена характеристическая функция этой величины, а также математическое ожидание и дисперсия. Полученные результаты могут быть использованы при анализе финансовой деятельности страховых компаний, а также других экономических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмедова Д. Д., Змеев О. А.* Математическая модель функционирования страховой компании с входящими рисками в виде пуассоновского потока событий переменной интенсивности // Обработка данных и управление в сложных системах : сборник статей : Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске под редакцией Е. В. Глуховой. Томск. 2002. С. 2-12.

2. *Даммер Д. Д.* Исследование математической модели страховой компании в виде бесконечно линейной системы массового обслуживания при синхронном дважды стохастическом входящем потоке событий // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 14-19.

3. *Ахмедова Д. Д., Змеев О. А.* Оптимизация расходов на рекламу при деятельности страховой компании // Известия высших учебных заведений. Физика. 2001. Т. 44. № 6. С. 3-6.

4. *Даммер Д. Д., Назаров А. А.* Исследование числа требований на страховые выплаты с произвольной величиной продолжительности договора // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2. С. 24-31.

5. *Dammer D. D.* Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system with unlimited number of devices considering implicit advertising // Information Technologies and Mathematical Modeling: Springer. 2015. Vol. 564. P. 163-175.

6. *Гафуров Ш. Р., Гугнин В. И., Аманов С. Н.* Язык бизнеса. Ташкент : Шарк, 1995. 738 с.

7. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.

8. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969. 424 с.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ПРОГНОЗИРОВАНИЮ ЦЕН НА ЗЕРНОВОМ РЫНКЕ

Г. Н. Камышова, С. И. Дудов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им.Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: gkamichova@mail.ru, dudovsi@info.sgu.ru

Предложен индикатор для прогнозирования цен актива на основе решения задачи чебышевского приближения дискретно заданной функции цены (по историческим данным) тригонометрическим полиномом. На примере зернового рынка проведены вычислительные эксперименты для исследования эффективности его прогнозных свойств на фоне сравнения с истинными историческими данными цен и с эффективностью прогнозных свойств скользящей средней.

COMPUTATIONAL EXPERIMENTS ON FORECASTING PRICES IN THE GRAIN MARKET

G. N. Kamyshova, S. I. Dudov

Indicator was built to predict the price of the asset on the basis of solving the problem of Chebyshev approximation for a given discrete value function (based on historical data) using trigonometric polynomial. On the example of the grain market of computational experiments conducted to compare the effectiveness of its predicted properties on the background of the comparison with the true historical data of prices and with the efficiency of predictive properties of the moving average.

1. Рынок зерна, занимая одно из первых мест по объемам товарооборота и денежных средств среди продуктовых рынков, во многом определяет решение целого спектра вопросов развития национального хозяйства. Поэтому резкие изменения цен на зерновом рынке влекут за собой негативные последствия для многих отраслей экономики любой страны, в частности и для агропромышленного комплекса. В связи с этим, прогнозирование ценовой ситуации на зерновом рынке играет важную роль в стабилизации экономики.

Целью настоящей работы является построение индикатора зернового рынка на основе чебышевского приближения тренда цен тригонометрическими полиномами, а также сравнение эффективности построенного индикатора с по-