nance, 2011. 384 p.
3. *Demers Elizabeth A. and Vega Clara* The Impact of Credibility on the Pricing of Managerial Textual Content (June 6, 2014). Available at SSRN: [Electronic resource]. URL: http://ssrn.com/abstract=1153450 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1153450 (date of access: 02.08.2016).
4. *Сидоров С. П., Сергушова О. И., Чебаков Р. А.* Анализ инструментальных средств и методов новостной аналитики // РИСК: Ресурсы. Информация. Снабжение. Конкуренция. 2010. № 2. С.143-147.
5. *Коробов Е. А., Файзлиев А. Р., Сидоров С. П.* Система обработки данных новостной аналитики // Компьютерные науки и информационные технологии : сб. материалов междунар. науч. конф. 2014. С. 167-169.
6. *Файзлиев А. Р., Сидоров С. П., Коробов Е. А*. Алгоритм детрендирования для анализа временных рядов новостной интенсивности // «ИЗМЕНЯЮЩИЙСЯ МИР: ОБЩЕСТВО, ГОСУДАРСТВО, ЛИЧНОСТЬ»: сборник материалов IV Междунар. науч. конференции: Саратов: ИЦ «Наука», 2015. С. 597-602.
7. *Коробов Е. А., Файзлиев А. Р.* Исследование корреляционной зависимости между объемом торгов акций страховых компаний и новостной интенсивностью // Страховые интересы современного общества и их обеспечение : сб. материалов XIV междунар. науч.-практ. конф. в 2 т. Саратов : Росгосстрах. 2013. Т. 2. С. 303-307.
8. *Сидоров С. П., Дате П., Балаш В. А.* Использование данных новостной аналитики в GARCH моделях // Прикладная эконометрика. 2013. № 29 (1). С. 82-96.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ С КОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

**В. М. Хаметов, Е. В. Ясонов**

*ЦЭМИ РАН Москва, Россия*
*НИУ «Высшая Школа Экономики», Москва, Россия*
E-mail: khametovvm@mail.ru, evyasonov@gmail.com

Работа посвящена решению задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом. Здесь впервые получены необходимые условия того, что урезанные цены оптимальной остановки удовлетворяют рекуррентному соотношению беллмановского типа (теорема 1). Сформулированы и обоснованы два критерия оптимальности остановки. В системе компьютерных алгебр Maple 14 построено аналитическое решение рекуррентного соотношения беллмановского типа для урезанной оптимальной остановке при наблюдении за геометрическим случайным блужданием.

# SOLUTION OF OPTIMAL STOPPING PROBLEM WITH FINITE HORIZON

**V. M. Khametov, E. V. Yasonov**

In this paper, we solve optimal stopping problem with finite horizon. Necessary conditions in recurrent relations in the form of a Bellman equation (theorem 1) are new. We establish criterions of optimality of a stopping time (theorems 2 and 3). We obtain explicit solution for geometric random walk using Maple 14.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача об оптимальной остановке случайных последовательностей возникает в задачах статистики (задача последовательного различения двух простых гипотез), техники (задача о разладке), финансовой математики (расчет американского опциона) и ряде других (см. [1] – [5], [7], [8], [10] – [14]). В [2] – [4], [7], [8], [11] для случая бесконечного горизонта построено решение задачи об оптимальной остановке. В отличие от работ [2] – [4], [7], [8], [11] здесь рассматриваем случай конечного горизонта.

В [10] в предположении, что область остановки отделяется от области продолжения наблюдений одной точкой, приводится решение задачи об оптимальной остановке, построение которого основано на методе Винера-Хопфа.

В [11] содержится наиболее полный обзор примеров, допускающих аналитическое решение задач об оптимальной остановке с конечным горизонтом (см. также [1], [2], [8]).

В статьях [12], [13] получены достаточные условия того, что область остановки отделяется от области продолжения наблюдений одной точкой.

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия того, что урезанные цены оптимальной остановки удовлетворяют уравнению беллмановского типа, а также критерии оптимальности остановки. Кроме того приведены примеры, явное решение которых получено в системе компьютерных алгебр Maple 14, при наблюдении за геометрическом случайным блужданием для различных функций полезности наблюдателя. Здесь также показывается, что для данной задачи область остановки состоит из трех несвязных интервалов.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть: i) $(\Omega, \mathrm{F}, (\mathrm{F}_n)_{n\geq 0}, \mathrm{P})$ – стохастический базис [8]; ii) $N \in \mathrm{N}^+$ – горизонт; iii) $\mathrm{T}_n^N$ – множество моментов остановки $\tau$ относительно фильтрации $(\mathrm{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ [8], принимающих значения из множества $\{n,...,N\}$; iv) $(f_n, \mathrm{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ – согласованная последовательность ограниченных случайных величин, финансовый смысл которой — полезность наблюдателя; v) $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathrm{F}_0)$ – множество всех $\mathrm{P}$-п.н. ограниченных $\mathrm{F}_0$-измеримых случайных величин [4, A.7].

Рассматривается задача

$$\mathrm{E}[f_{\tau\wedge N} \mid \mathrm{F}_0] \to \underset{\tau\in \mathrm{T}_0^N}{\mathrm{e}ss\ sup}, \tag{1}$$

где $\mathrm{E}[\cdot \mid \mathrm{F}_0]$ – условное математическое ожидание относительно $\sigma$-алгебры $\mathrm{F}_0$ (определение см. в [4], определение существенной верхней грани можно найти в [4], [9]).

Задачу (1) называют задачей об оптимальной остановке (например, [8]), в которой максимизируется ожидаемая полезность наблюдателя.

Обозначим $v_0^N \triangleq \underset{\tau\in \mathrm{T}_0^N}{\mathrm{e}ss\ sup}\, \mathrm{E}[f_{\tau\wedge N} \mid \mathrm{F}_0]$.

**Определение.** Пару $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in \left(\mathrm{T}_0^N, \mathrm{L}^0\left(\Omega, \mathrm{F}_0\right)\right)$ такую, что $v_0^N = \mathrm{E}[f_{\tau^* \wedge N} \mid \mathrm{F}_0]$ $\mathrm{P}$-п.н., будем называть решением задачи (1), при этом: i) момент остановки $\tau^* \in \mathrm{T}_0^N$ назовем оптимальным; ii) $\mathrm{F}_0$-измеримую случайную величину $v_0^N$ – ценой оптимальной остановки.

## РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ УРЕЗАННОЙ ЦЕНЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ.

Для нахождения цены оптимальной остановки применим стохастический вариант метода динамического программирования. Для любого $n \in \{1, ..., N\}$ обозначим

$$v_n^N = \underset{\tau \in \mathrm{T}_n^N}{ess\ sup}\, \mathrm{E}[f_{\tau \wedge N} \mid \mathrm{F}_n].$$

**Определение.** [8] Случайную величину $v_n^N$ называют урезанной ценой оптимальной остановки в момент времени $n$.

**Замечание.** Если последовательность $\{f_n\}_{0 \le n \le N}$ ограничена, то легко показать, что для любого $n \in \{0, ..., N\}$ $\mathrm{F}_n$-измеримые случайные величины $v_n^N$ ограничены с вероятностью 1.

Приведём рекуррентное соотношение, описывающее эволюцию урезанной цены оптимальной остановки.

**Теорема 1.** $(v_n^N, \mathrm{F}_n)_{0 \le n \le N}$ — последовательность урезанных цен тогда и только тогда, когда она удовлетворяет рекуррентному соотношению $\mathrm{P}$-п.н.

$$v_n^N = \max\left\{f_n; \mathrm{E}[v_{n+1}^N \mid \mathrm{F}_n]\right\}, \quad v_n^N \mid_{n=N} = f_N. \tag{2}$$

**Замечание.** Достаточность утверждения теоремы 1 известна [7, 2а Главы V], [4, 6.2], [3, Глава 3]. Необходимость установлена впервые.

Из утверждения теоремы 1 следует критерий того, что пара $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in \left(\mathrm{T}_0^N, \mathrm{L}^0\left(\Omega, \mathrm{F}_0\right)\right)$ является решением задачи (1).

**Теорема 2.** Пара $\left(\tau^*, v_0^N\right) \in \left(\mathrm{T}_0^N, \mathrm{L}^0\left(\Omega, \mathrm{F}_0\right)\right)$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда выполняются условия:

i) последовательность $(v_n^N, \mathrm{F}_n)_{0 \le n \le \tau^* \wedge N}$ – мартингал относительно меры $\mathrm{P}$;

ii) $v_n^N \mid_{n=\tau^* \wedge N} = f_{\tau^* \wedge N}$ $\mathrm{P}$-п.н.

**Замечание.** В отличие работ [4] и др., теорема 2 — это критерией оптимальности момента остановки $\tau^*$.

Утверждения теорем 1 и 2 позволяют сформулировать другой критерий оптимальностии момента остановки $\tau^* \in \mathrm{T}_0^N$.

**Теорема 3.** Момент остановки $\tau^*$ оптимален тогда и только тогда, когда $\tau^* = \min\left\{0 \le n \le N : f_n = v_n^N\right\}$.

**ПРИМЕРЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ**

Утверждения теорем 1, 2 и 3 позволяют произвести математическое моделирование задачи об оптимальной остановке.

**Определение.** [8] Для любого $n \in \{0,...,N\}$ множество $\mathrm{D}_n \triangleq \{x \in \mathrm{R}^+ : f_n(x) = v_n^N(x)\}$ называют областью остановки в момент времени $n$.

Пусть случайная последовательность $(S_n, \mathrm{F}_n)_{0 \le n \le N}$ задана рекуррентным соотношением $S_{n+1} = S_n(1+\rho_{n+1})$, $S_n|_{n=0} = S_0$ $\mathrm{P}$-п.н., где $\{\rho_n\}_{0 \le n \le N}$ – последовательность бернуллевских случайных величин, с положительной вероятностью принимающих значения из $\{a,b\}$, $a,b \in \mathrm{R}^1$. Пусть $p \triangleq \mathrm{P}(\rho_n = a)$, $q \triangleq \mathrm{P}(\rho_n = b) = 1 - p$.

**Пример 1.** На рисунке 1 приведены зависимости:

1) $f(x)$ – функции полезности, имеющей три локальных экстремума для любого $n \in \{0,...,N\}$,

2) урезанной цены оптимальной остановки,

3) область остановки.

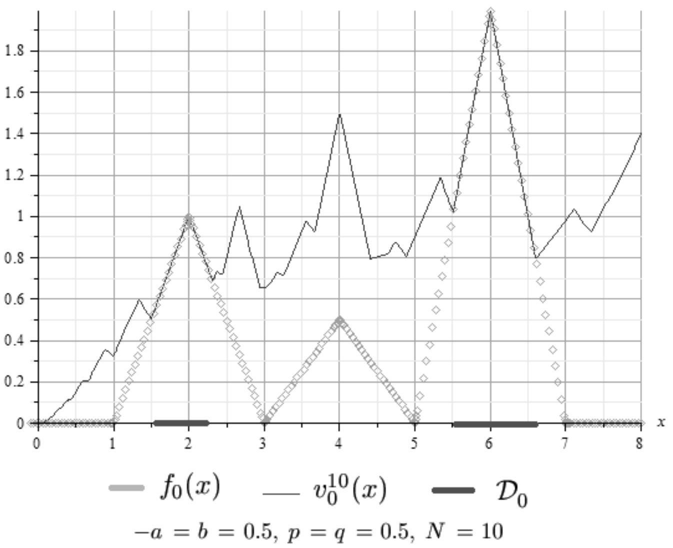


Рис. 1. Функция $f(x)$ имеет 3 экстремума

**Пример 2.** На рисунке 2 приведены зависимости:

1) $f(x)$ – функции полезности, имеющей два экстремума (положительный и отрицательный) для любого $n \in \{0,...,N\}$,

2) урезанной цены оптимальной остановки,

3) область остановки.

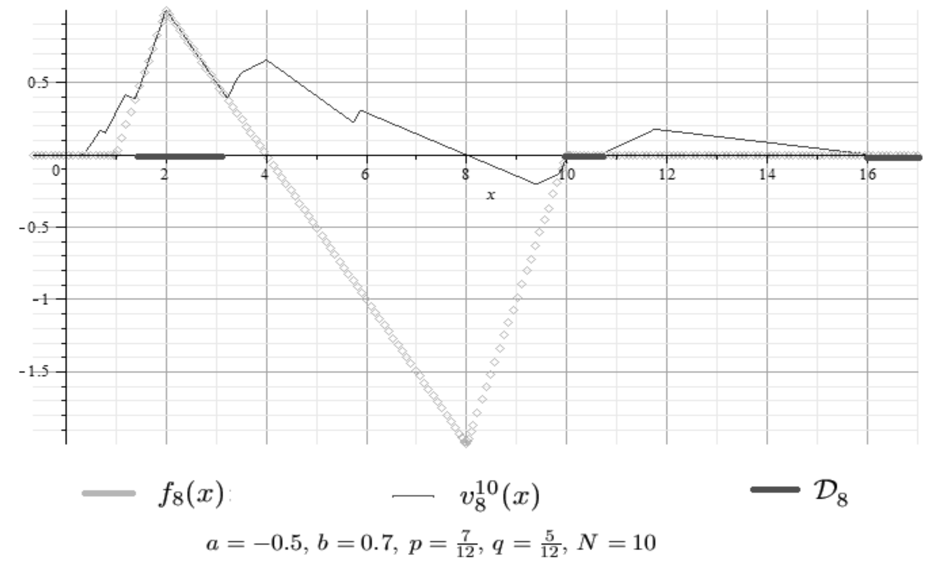


Рис. 2. Функция $f(x)$ имеет два экстремума
(положительный и отрицательный)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М. : МИР, 1974. 492 с.

2. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. М. : Наука, 1967. 232 с.

3. *Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И.* Теория оптимальных правил остановки. М. : Наука, 1977. 165 с.

4. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М. : МЦНМО, 2008. 496 с.

5. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В.* Минимаксное хеджирование американсого опциона на неполном рынке с конечным горизонтом - это задача об оптимальной остановке // ОПиПМ. 2013. Т. 20. Вып. 2. С. 155.

6. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М. : МЦНМО, 2004. 256 с.

7. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М. : ФАЗИС, 1998. 544 с.

8. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. М. : Наука, 1976. 272 с.

9. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его применения. М. : Мир, 1986. 352 с.

10. *Boyarchenko S. I., Levandorskii S. Z.* Non-Gaussian Merton-Black-Scoles Theory. Advanced Series On Statistical // Science and Applied Probability. 2002.Vol. 9. P. 201-233.

11. *Ferguson T. S.* Optimal Stopping and Applications. Unpublished manuscript. 2000. [Electronic resource]. URL: http://www.math.ucla.edu/tom/Stopping/Contents.html (date of access: 10.07.2014).

12. *Jönsson H., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for american type option. I // Theory Probab. Math. Statist. 2005. Vol. 71. P. 93–103.

13. *Jönsson H., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for american type option. II. // Theory Probab. Math. Statist. 2006. Vol. 72. P. 47–58.

14. *Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Optimal pricing of American type options with descrete time // Theory Stoch. Proces. 2004. Vol. 10 (26). №. 1–2. P. 72-96.