СОЗДАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ОПЦИОНОВ БЕЗРИСКОВЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

А. В. Шаталина, Е. М. Родионова

Саратовский государственный университет, Россия
E-mail: mexmat@sgu.ru

К наиболее распространенным производным финансовым инструментам относится опцион. Он играет особую роль при разработке стратегий на мировых и финансовых рынках. Рассматриваются несколько видов опционов (пут и колл), основные факторы, от которых зависит цена опциона, приводятся соотношения цен опционов колл и пут, а также пример построения безрисковых портфелей с помощью опционов.

CREATING WITH OPTIONS RISK-FREE PORTFOLIO

A. V. Shatalina, E. M. Rodionova

The most common derivatives include the option. He plays a special role in the development of policies at the global and financial markets. Discusses several types of options (put option and call option), the main factors that affect the price of the option, given the relative prices of call option and put option and example of constructing a risk-free portfolio by using options.

Финансовый рынок – совокупность всех финансовых ресурсов в их движении. Он объединяет денежный рынок и рынок капиталов; а также совокупность рыночных институтов, на которых происходит торговля финансовыми активами.

Объекты финансового рынка могут быть разделены на основные ценные бумаги (акции, облигации) и производные финансовые инструменты, величина или стоимость которых зависит от более базисных объектов. К наиболее распространенным производным инструментам относятся: форвардная сделка, опцион, фьючерсный контракт, своп и т.д. В данном списке опционы играют особую роль, так как многие направления теории были созданы именно при решении задач об оценке опционов.

Опцион – ценная бумага, дающая право её владельцу купить определённое имущество у лица, выпустившего опцион, (или продать определённое имущество лицу, выпустившему опцион) по установленной цене в течение некоторого времени. Опцион, дающий право купить имущество, называется call option (опцион колл); опцион, дающий право продать имущество, называется put option (опцион пут); установленная фиксированная цена носит название exercise price (strike price); дата реализации контракта называется expiration date (exercise date, maturity) [1].

При заключении такого договора та сторона, которая приобретает право купить или продать имущество, должна заплатить другой стороне определённую сумму независимо от того, воспользуется она этим правом или нет. Точный расчёт этой премии, называемой ценой опциона, представляет собой трудную и весьма актуальную задачу торговли опционами. Выделены основные факторы, от которых зависит цена опциона [2]:

1. момента времени t и от срока истечения опциона T;

2. текущей цены акции $S(t)$ цены исполнения X, выплачиваемых дивидендов;

3. характера изменения цены акции с течением времени (чем больше колебания, которые испытывает цена акции, тем выше цена опциона);

4. вида опциона (европейский или американский).

На основе сделанных предположений выведены соотношения между ценами опционов колл и пут, европейского и американского типа [3].

Соотношение цен европейских опционов колл и пут:

$$c(t) - p(t) - S(t) + X * P(t,T) = 0,$$

Соотношение цен американских опционов колл и пут:

$$S(t) - X < C(t) - P(t) < S(t) - X * e^{-r(T-t)},$$

Верхняя и нижняя оценка стоимости опциона:

$$C \leq S(t);\; S(t) - X * e^{-r(T-t)},\; c \leq S(t).$$

$$P \leq X;\; X * e^{-r(T-t)} < p \leq X.$$

Данные соотношения остаются справедливыми всегда, независимо от того как меняется цена базисного актива. Сама же цена опциона всегда зависит от того какая модель ценообразования положена в основу опционного контракта.

На основе рассмотренных моделей ценообразования проводится решение задачи справедливой цены опциона европейского типа, а также создание безрисковых портфелей с помощью опционов.

Пример 1: Допустим, что поведение цены актива описывается биномиальной одноперіодной моделью. Пусть цена актива $S = 60$ д.е., такова же и цена исполнения европейского колл опциона $c = 60$ д.е. Срок действия опциона $T = 1$ месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью $1/2$ цена актива либо поднимается на 15 д.е., либо опускается на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором случае не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен ничего платить. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля продавец опционов должен выписать 2 опциона на покупку. Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый. В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля вынужден будет доплатить держателям опционов 30 д.е., во втором случае - ничего. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 45 д.е., независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость. Теперь перейдём непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисковый, то его современную стоимость найдём, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке.

Итак, его современная стоимость равна $41*(1+0{,}1)=45$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е., поэтому два опциона вместе стоят $60-41=19$ д.е. Следовательно, один опцион стоит $9{,}5$ д.е. За такую цену оба опциона и должны быть проданы. Интересно детально проследить за состоянием (богатством) продавца опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он выписал и продал два опциона, каждый по $9{,}5$ д.е. Теперь у него денег 19 д.е. за проданные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и обязательства по обеспечению двух опционов, цена этих обязательств 19 д.е. и они образуют его пассив. Актив и этот пассив вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 41 д.е. К концу месяца 19 д.е. возрастут по безрисковой ставке до $19*(1+0{,}1)=21$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастёт по безрисковой ставке до $41*(1+0{,}1)=45$ д.е. Всего у продавца опционов будет $21+45=66$ д.е. – в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60*(1+0{,}1)=66$ д.е.! Умелое хеджирование полностью оградило от риска.

Пример 2: Создать безрисковый портфель можно и с помощью опционов на продажу. Пусть цена актива $S=60$ д.е., такова же и цена исполнения европейского пут опциона $p=60$ д.е. Срок действия опциона $T=1$ месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью $1/2$ цена актива либо поднимается на 15 д.е., либо опускается на столько же. В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором случае не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен ничего платить. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля держатель актива должен купить 2 опциона на продажу. Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый. В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец ничего не будет делать с купленными им опционами на продажу, во втором случае продавец опционов выплатит ему по 15 д.е. за опцион. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 75 д.е., независимо от цены актива. Это и означает его безрисковость. Теперь перейдём непосредственно к определению цены опциона. Пусть банковская безрисковая ставка равна 10%. Так как портфель безрисковый, то его современную стоимость найдём, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке. Итак, его современная стоимость равна $75/(1+0{,}1)=68{,}2$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е., поэтому два опциона вместе стоят $68{,}2-60=8{,}2$ д.е. Следовательно, один опцион стоит $4{,}1$ д.е. За такую цену оба опциона и должны быть куплены. Проследим детально за капиталом покупателя опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он купил два опциона, каждый по $4{,}1$ д.е. Теперь у него денег -8 д.е. – долг за купленные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и два опциона, являющиеся фактически тоже активами, цена этих активов $8{,}2$ д.е. Прежний актив и эти два опциона вместе образуют безрисковый портфель стоимостью $68{,}2$ д.е. К концу месяца $-8{,}2$ д.е. уменьшатся по безрисковой ставке до $-8,2*(1+0,1)=9$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастёт по безрисковой ставке до $68,2*(1+0,1)=75$ д.е. Всего у покупателя будет $75-9=66$ д.е. – в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60*(1+0,1)=66$ д.е.! Умелое хеджирование полностью оградило покупателя от риска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дойников А. Н.* Введение в анализ производных финансовых инструментов : учебное пособие для студентов факультета. М. : ВМиК МГУ, 2002. 35 с.
2. *Буренин. А. Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. М. : Федеративная Книготорговая Компания, 1998. 348 с.
3. *Шелдон Н.* Опционы. Волатильность и оценка стоимости. Стратегии и методы опционной торговли М. : Альпина Бизнес Букс, 2007. 205 с.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В. Р. Шебалдин

Саратовский государственный университет, Россия
E-mail:Vrsh2007@ramler.ru

В настоящей статье доказываются необходимые условия экстремума для одной задачи оптимального управления, имеющей приложение к модели экономического роста предприятия односекторной экономики.

THE NECESSARY CONDITIONS IN THE ONE PROBLEM OF ECONOMC GROWTH

V. R. Shebaldin

This article is devoted to the theory of the maximum principle as applied to a special class of optimal control problems that arise in economic growth problems.

Рассмотрим модель Рамсея экономического роста предприятия замкнутого типа, см. [1, с.8]. Под таким предприятием понимается производство, на котором создается один универсальный продукт, который может потребляться и инвестироваться. При этом рынки работают бесперебойно, производственные факторы существенно не меняются, при изменении цен технология не подвергается никаким изменением.

Пусть $K(t)$ - капитал предприятия, $L(t)$- количество занятых на производстве. В качестве управления $u(t)$ указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала предприятия; $F(K,L)$ - функция производства. В качестве критерия качества берется интеграл от логарифмической функции мгновенной полезности, характеризующий темпы роста потребления на единицу рабочей силы. Таким образом, для конечного интервала времени имеем следующую модель: