по безрисковой ставке до $-8{,}2*(1+0{,}1)=9$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастёт по безрисковой ставке до $68{,}2*(1+0{,}1)=75$ д.е. Всего у покупателя будет $75-9=66$ д.е. – в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60*(1+0{,}1)=66$ д.е.! Умелое хеджирование полностью оградило покупателя от риска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дойников А. Н.* Введение в анализ производных финансовых инструментов : учебное пособие для студентов факультета. М. : ВМиК МГУ, 2002. 35 с.

2. *Буренин. А. Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. М. : Федеративная Книготорговая Компания, 1998. 348 с.

3. *Шелдон Н.* Опционы. Волатильность и оценка стоимости. Стратегии и методы опционной торговли М. : Альпина Бизнес Букс, 2007. 205 с.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

В. Р. Шебалдин

Саратовский государственный университет, Россия
E-mail:Vrsh2007@ramler.ru

В настоящей статье доказываются необходимые условия экстремума для одной задачи оптимального управления, имеющей приложение к модели экономического роста предприятия односекторной экономики.

THE NECESSARY CONDITIONS IN THE ONE PROBLEM OF ECONOMC GROWTH

V. R. Shebaldin

This article is devoted to the theory of the maximum principle as applied to a special class of optimal control problems that arise in economic growth problems.

Рассмотрим модель Рамсея экономического роста предприятия замкнутого типа, см. [1, с.8]. Под таким предприятием понимается производство, на котором создается один универсальный продукт, который может потребляться и инвестироваться. При этом рынки работают бесперебойно, производственные факторы существенно не меняются, при изменении цен технология не подвергается никаким изменением.

Пусть K(t) - капитал предприятия, L(t)- количество занятых на производстве. В качестве управления u(t) указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала предприятия; F(K,L) - функция производства. В качестве критерия качества берется интеграл от логарифмической функции мгновенной полезности, характеризующий темпы роста потребления на единицу рабочей силы. Таким образом, для конечного интервала времени имеем следующую модель:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \quad K(0) = K_0, \tag{1}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = L_0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \quad t \in [0, T] \tag{3}$$

$$J(K, L, u) = \int_0^T \{ e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K, L)]\} dt + e^{-\rho T} \ln C(T) \to \max, \tag{4}$$

μ>0-заданный коэффициент потери трудовых ресурсов; ρ =const, ρ>0-коэффициент дисконтирования; ε=const, ε>0 -заданный параметр, определяющий часть произведенного продукта, которую предприятие обязано потратить на развитие производства; функция производства F(K,L) дважды непрерывно дифференцируемая, $C(t) = (1 - u(t))F(K, L)$ - часть капитала, идущая на потребление, F(K,L) – положительная, однородная функция своих аргументов; u(t)-кусочно-непрерывная функция.

Отметим, что для предприятия также существенны такие показатели как достижение определенного уровня капитала в заданные моменты времени, относительные показатели уровня риска для сбыта продукции
и другие показатели, см. [2].

В настоящей работе рассматриваются ограничения на фондовооруженность предприятия в фиксированные моменты времени, см. [3], то есть

$$\frac{K(t_j)}{L(t_j)} \geq c_j, \quad j = \overline{1, q}, \quad t_j \in [0, T], \tag{5}$$

где c_j – заданные константы.

Было доказано, что при замене $x(t) = K(t)/L(t)$ задача (1)- (5) сводится к следующей

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0 \tag{6}$$

$$u \in U_\varepsilon \tag{7}$$

$$x(t_j) \geq c_j, \; j = \overline{1, q} \tag{8}$$

$$J(x, u) = \int_0^T \{e^{=\rho t}(\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t)))\}dt + e^{-\rho T} \ln f(x(T)) \to m \tag{9}$$

где f(x)=F(x,1). В настоящей работе будут получены уравнения, определяющие необходимые условия экстремума в виде максиминной задачи. Ранее в статьях [3]-[5] были получены уравнения необходимых условий экстремума в виде максиминной задач для линейной задачи оптимального управления на конечном отрезке времени с терминальным критерием качества и доказана сходимость алгоритма численного решения данной задачи, построенного на их основе. В настоящей работе, как и в статье [3], необходимые условия экстремума будут получены с помощью теоремы Дубовицкого-Милютина, см. [4]. Обозначим $(\hat{x},\hat{u})$-оптимальная пара исходной задачи.

Рассмотрим редукцию данной задачи к линейной задаче оптимального управления.

В работе [5, с.160-163], доказывается, что тогда пара функций $(y_*(\tau),v_*(\tau))$ является оптимальной для следующей задачи оптимального управления

$$\dot{y}=\tilde{f}(y(\tau),\omega_*(\tau))v(\tau),\quad y(0)=x_0,\quad \tau\in[0,1] \qquad (10)$$

$$\dot{t}(\tau)=v(\tau), \qquad (11)$$

$$t(0)=0,\quad t(1)=T, \qquad (12)$$

$$y(\tau_j)\le 0,\quad j=\overline{1,q}, \qquad (13)$$

$$v(\tau)\ge 0, \qquad (14)$$

$$J_1(y,v)=\int_0^1 v(\tau)f_0(y(\tau),\omega_*(\tau))d\tau+e^{-\rho T}\ln f(y(1))\to\max, \qquad (15)$$

где $\omega_*(\tau)=\begin{cases}\hat{u}(t_*(\tau)), & \tau\in\Delta(v_*),\\ u(\tau), & \tau\notin\Delta(v_*),\end{cases}$ $u(t)\in U$, $\Delta(v_*)$-объединение интервалов отрезка $\{0,1\}$, см. [5], функция v_* определяется так же, как и в работе [5]. $f_0=e^{-\rho t}(\ln(1-u(t))+\ln f(x(t)),\tilde{f}=u(t)f-\mu x(t)$, функция $t(\tau),t_*(\tau),y_*(\tau)$ определяются следующим образом:

$$t(\tau)=t_0+\int_0^\tau v(s)ds, t_*(\tau)=t_0+\int_0^\tau v_*(s)ds, y_*=y(\tau,v_*)\ .$$

Воспользуемся данной вспомогательной задачей для доказательства необходимых условий экстремума задачи (6)-(9).

Теорема. Пусть $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$-оптимальная пара задачи (6)-(9). Тогда существуют дифференцируемые функции $\psi_j(t),\ j=\overline{0,q}$, удовлетворяющие следующим уравнениям

$$\max_{u(t)\in V_\varepsilon}\ \min_{j\in M_0}\int_0^T\Delta_u H_j(t)dt=0,$$

$$\dot{x}(t)=\hat{u}(t)f(\hat{x}(t))-\mu\hat{x}(t),\quad x(0)=x_0,\quad t\in[0,T],$$

$$\dot{\psi}_0(t)+\psi_0(t)(\hat{u}(t)f'(\hat{x}(t))-\mu)+\frac{e^{-\rho t}}{f(\hat{x}(t))}f'(\hat{x}(t))=0,$$

$$\psi_0(T)=-e^{-\rho T}\frac{f''(\hat{x}(T))}{f(\hat{x}(T))}, t\in[0,T],$$

$$M_0=M\cup\{0\},\ M=\{j\,|\,\hat{x}(t_j)=c_j\},\ j=\overline{1,q},$$

$$\psi_j(t)=\begin{cases}\tilde{\psi}_j(t), & t\in[0,t_j]\\ 0, & t\in[t_j,T], \quad j=\overline{1,q}\end{cases}$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_j(t)=-\tilde{\psi}_j(\hat{u}f'(\hat{x}(t))-\mu), \quad \tilde{\psi}_j(t_j)=1, t\in[0,t_j]$$

$$\Delta_u H_j(t)=\psi_j(t)f(\hat{x}(t))(u(t)-\hat{u}(t)), \quad j=\overline{1.q},$$

$$\Delta_u H_0(t)=\psi_0[f_0(\hat{x}(t),u(t))-f_0(\hat{x},\hat{u})],$$

где V_ε -множество кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению (7).

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную задачу (10)-(15). Тогда согласно теоремы 2.1, см. [5, с.400], вида функционалов, принадлежащих сопряженным конусам, соответствующих ограничениям данной задачи оптимального управления, получим неравенство

$$\alpha_0\int_0^1\psi_0(\tau)f_0(y_*,\omega_*)d\tau+\sum_{j\in\tilde{M}}\alpha_j\int_0^1\tilde{\psi}_j\tilde{f}(y_*,\omega_*)(v-v_*)d\tau+$$

$$+\lambda\int_0^1(v-v_*)d\tau\le 0,$$

где

$$y_*(t)=y(t,v_*), \quad \alpha_j\ge 0,\alpha_j=const, \quad \lambda=const,$$

$$\tilde{M}=\{\ j\mid y_*(\tau_j)=0\ \}, \quad j=\overline{1,q},$$

$$\dot{y}=\tilde{f}_x(y_*(\tau),\omega_*(\tau))v(\tau)+\tilde{f}_v(y_*(\tau),\omega_*(\tau))v(\tau), \quad y(0)=0\ , \quad \tau\in[0,1]\quad ,$$

$$\dot{t}(\tau)=v(\tau),t(0)=0,\tau\in[0,1],$$

$$v_*(\tau)+\delta(v+\tilde{v})\ge 0, \quad \|\tilde{v}\|\le\delta, \forall\varepsilon\in(0,\delta_0],$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_j(\tau)=-\tilde{\psi}_j v_*\tilde{f}_x(y_*,\omega_*), \quad \tilde{\psi}_j(\tau_j)=-1, \tau\in[0,\tau_j]\quad ,$$

$$\tilde{\psi}_j(\tau)\equiv 0, \quad \tau\in(\tau_j,T], \quad j=\overline{1,q},$$

$$\dot{\psi}_0(\tau)=-v_*\tilde{f}_x(y_*,\omega_*)\psi_0+v_*f_{0.x}(y_*,\omega_*), \quad \psi_0(1)=-e^{-\rho T}\frac{\tilde{f}'(y(1))}{\tilde{f}(y(1))}.$$

Тогда, как и при доказательстве теоремы 1 из [5, с.400], можно получить следующее неравенства

$$\alpha_0\psi_0 f_0(y_*,\omega_*)+\sum_{j\in\tilde{M}}\alpha_j\tilde{\psi}_j\tilde{f}(y_*,\omega_*)\le 0,$$

для п.в. $\tau\in[0,1]/\Delta(v_*)$ и при $\tau\in\Delta(v_*)$ получим

$$\alpha_0\psi_0 f_0(y_*,\omega_*)+\sum_{j\in\tilde{M}}\alpha_j\tilde{\psi}_j\tilde{f}(y_*,\omega_*)=0.$$

Откуда, так же как и в работе [5, с.160] при замене $\tau = \tau(t)$, определения функции $\omega_*(t)$ из последних двух выражений получаются уравнения данной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Aseev S. M., Kryazhimsky A. V.* The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Growth Problems // Steklov InstituteofMath. Russian Academy of Science. Moscow. 2007. Vol. 237. P. 253.

2. *Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталёв Е. Ю.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесею М. :Финансы и статистика, 1999. 176 с.

3. *Шебалдин В. Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. Деп. в ВИНИТИ, № 2999-В89ДЕП, 1989. 37 с.

4.*Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395-453.

5.*Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 480 с.

РАСЧЕТ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ НА НЕПОЛНОМ РЫНКЕ, ЗАДАННОМ МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Е. А. Шелемех

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия
E-mail: letis@mail.ru

Рассматриваются экзотические опционы, исполнение которых зависит от наступления некоторого случайного события, на неполном рынке, заданном марковской последовательностью с конечным числом состояний. В работе впервые описан и применен минимаксный подход для расчета экзотических опционов этого типа на неполном рынке. Минимаксный подход позволил конструктивно описать самофинансируемый портфель продавца экзотического опциона, на котором достигается минимум ожидаемого значения экспоненциального риска продавца. Показано, что соответствующий портфель с потреблением является совершенным суперхеджирующим портфелем экзотического опциона относительно любой дискретной вероятностной меры. При этом капитал построенного портфеля не превосходит капитал любого другого суперхеджирующего портфеля.

CALCULATION OF EXOTIC OPTIONS IN INCOMPLETE MARKET SPESIFIED BY MARKOV CHAIN WITH FINAL NUMBER OF STATES

E. A. Shelemekh

We consider exotic options with execution depending on occurrence of some random event in incomplete market specified by Markov chain with final number of states. It is the first time minimax approach is described and used to calculate exotics of the type in incomplete market. With minimax approach we managed to give a constructive description of the seller's self-financing portfolio which delivers the maximum of the seller's expected exponential risk. It is proved that the