Откуда, так же как и в работе [5, с.160] при замене $\tau = \tau(t)$, определения функции $\omega_*(t)$ из последних двух выражений получаются уравнения данной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1.*Aseev S. M., Kryazhimsky A. V.* The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Growth Problems // Steklov InstituteofMath. Russian Academy of Science. Moscow. 2007. Vol. 237. P. 253.

2. *Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталёв Е. Ю.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесею М. :Финансы и статистика, 1999. 176 с.

3. *Шебалдин В. Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. Деп. в ВИНИТИ, № 2999-В89ДЕП, 1989. 37 с.

4.*Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395-453.

5.*Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 480 с.


# РАСЧЕТ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ НА НЕПОЛНОМ РЫНКЕ, ЗАДАННОМ МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ


**Е. А. Шелемех**

*Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия*
E-mail: letis@mail.ru



Рассматриваются экзотические опционы, исполнение которых зависит от наступления некоторого случайного события, на неполном рынке, заданном марковской последовательностью с конечным числом состояний. В работе впервые описан и применен минимаксный подход для расчета экзотических опционов этого типа на неполном рынке. Минимаксный подход позволил конструктивно описать самофинансируемый портфель продавца экзотического опциона, на котором достигается минимум ожидаемого значения экспоненциального риска продавца. Показано, что соответствующий портфель с потреблением является совершенным суперхеджирующим портфелем экзотического опциона относительно любой дискретной вероятностной меры. При этом капитал построенного портфеля не превосходит капитал любого другого суперхеджирующего портфеля.


# CALCULATION OF EXOTIC OPTIONS IN INCOMPLETE MARKET SPESIFIED BY MARKOV CHAIN WITH FINAL NUMBER OF STATES


**E. A. Shelemekh**



We consider exotic options with execution depending on occurrence of some random event in incomplete market specified by Markov chain with final number of states. It is the first time minimax approach is described and used to calculate exotics of the type in incomplete market. With minimax approach we managed to give a constructive description of the seller's self-financing portfolio which delivers the maximum of the seller's expected exponential risk. It is proved that the

matching portfolio with consumption is a perfect superhedging one with respect to any discreet probability measure. Also capital of such perfect superhedging portfolio does not exceed capital of any other superhedging portfolio.

Опцион – это контракт между продавцом и покупателем, состоящий из двух частей: 1) реализация продавцом опциона права на совершение с ним сделки с рисковым активом в будущем на условиях, зафиксированных в момент продажи в контракте, при этом продавец получает премию (справедливую стоимость опциона); 2) исполнение опциона, т.е. совершение продавцом и покупателем опциона указанной выше сделки с рисковым активом. В последние десятилетия на финансовых рынках набирают все большую популярность опционы, исполнение которых зависит от наступления некоторого случайного события, такого как достижение ценой рискового актива заданного уровня (например, бинарные и барьерные опционы) [1]. Такие контракты относятся к так называемым «экзотическим опционам». Доклад посвящен решению задачи расчета экзотических опционов указанного типа на неполных рынках.

Основная сложность, возникающая при расчете опционов на неполных рынках, связана с тем, что распределение цен рисковых активов, действующее на рынке, участникам рынка не известно. В настоящее время существует два подхода к разрешению этой проблемы. Первый – это построение суперхеджирующего портфеля, капитал которого позволяет исполнить обязательство по опциону относительно любой вероятностной меры из множества эквивалентных мартингальных [2], [3]. Второй подход состоит в выборе меры, максимизирующей полезность продавца [4], [5]. Однако, ни один из этих подходов не дает конструктивного способа построения решения.

В докладе для решения рассматриваемой задачи на неполном рынке, заданном марковской случайной последовательностью с конечным множеством состояний, впервые применен минимаксный подход, описанный ниже. Его применение позволило получить явные формулы для портфеля продавца, минимизирующего ожидаемое значение экспоненциального риска продавца опциона. Показано, что соответствующий портфель с потреблением является совершенным суперхеджирующим с минимальным капиталом.

1. Описание рынка. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, \mathrm{P})$ задана случайная последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$:

$$S_n = S_{n-1}(1+\rho_n),\ S_n|_{n=0}\ S_0, \tag{1}$$

где $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ – последовательность независимых в совокупности, одинаково распределенных случайных величин со значениями из множества $\{a_1,\ldots,a_l\}$, $2\leq l<\infty$, причем $-1<a_1<\ldots<0<\ldots<a_l<\infty$, и для любых $i=\overline{1,l}$ и $n\geq 1$: $p_i := \mathrm{P}(\rho_n = a_i)\geq 0$, $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$. Набор, состоящий из одного актива, стоимость которого постоянна и равна 1 (*безрисковый актив*), и одного актива, эволюция цены которого описывается случайной последовательностью $\{S_n\}_{n\geq 0}$ (*рисковый актив*), называют *{1,S}-рынком* [2].

Пусть на $(\Omega, F)$ заданы также дискретные меры Q такие, что для любых

$i=\overline{1,l}$ и $n \geq 1$: $q_i := \mathrm{Q}(\rho_n = a_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{l} q_i = 1$. Множество мер Q, относительно которых элементы последовательности $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ независимы в совокупности, обозначим через $\mathrm{R}$ . Очевидно, что $\mathrm{R}$ не пусто, компактно и содержит бесконечно много мартингальных мер. Таким образом, рассматриваемый рынок является неполным [2].

2. Минимаксная постановка задачи расчета экзотического опциона. Нам потребуются следующие обозначения: 1) $N$ – горизонт; 2) $T_n^{N+1}$ - множество моментов остановки $\tau \wedge (N+1)$ относительно фильтрации $(F_n)_{n\geq 0}$ (где $F_n := \sigma\{S_0,...,S_n\}$, $n \geq 0$), принимающих значения в множестве $\{n, n+1,..., N+1\}$. При $n \leq \tau$ момент остановки $\tau$ имеет смысл момента наступления случайного события, обуславливающего исполнение экзотического опциона. Для удобства изложения в рассмотрение введен также вспомогательный момент *N+1*. Если $\tau > N$ , то примем $\tau = N+1$, $S_{N+1} = S_N$ , $\beta_{N+1} = \beta_N$ , $\gamma_{N+1} = \gamma_N$ ; 3) $\{f_n\}_{0\leq n\leq N}$ - согласованная последовательность неотрицательных случайных величин. Если $\tau = n$, $n \in \{0,...,N\}$, то величина $f_n$ имеет смысл суммы выплаты по опциону согласно контракту, $f_{N+1} \equiv 0$. Тогда *экзотический опцион* рассматриваемого типа полностью описывается парой $(\tau, f_\tau)$.

Пусть $\beta = \{\beta_n\}_{n\geq 0}$ и $\gamma = \{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ – предсказуемые случайные последовательности, элементы которых имеют смысл *количества безрискового* и *рискового активов* в момент времени $n$, соответственно. Обозначим: $D$ – множество, состоящее из всех $\gamma$, $D_n^k$ – множество с элементами $\gamma_n^k = (\gamma_n,...,\gamma_k)$, $0 \leq n \leq k$. Набор $\pi = \{\beta, \gamma\}$ называют *портфелем*, а случайную величину $X_n^\pi = \beta_n + \gamma_n S_n$ – *капиталом портфеля* $\pi$ в момент времени $n \geq 0$ [2]. Портфель $\pi$ называют *самофинансируемым*, если для любого $n \geq 1$: $\Delta\beta_n = -\Delta\gamma_n S_{n-1}$.

Разность $X_\tau^\pi - f_\tau$ назовем *дефицитом капитала портфеля продавц*а экзотического опциона. Пусть функция риска продавца экспоненциальная, зависит от полученной продавцом премии про продаже опциона и от дефицита капитала его портфеля, т.е. имеет вид: $\exp\{X_0^\pi - (X_\tau^\pi - f_\tau)\}$. Число $I_0^{\gamma,\mathrm{Q}} := \mathrm{E}^{\mathrm{Q}} \exp\{X_0^\pi - (X_\tau^\pi - f_\tau)\}$ назовем *ожидаемым риском продавца* относительно меры $\mathrm{Q} \in \mathrm{R}$ .

Предполагается, что явный вид распределения вероятностей, соответствующего описывающей рынок мере $\mathrm{Q} \in \mathrm{R}$ , участникам рынка не известен. При этом в соответствии с контрактом продавец обязан достоверно исполнить опцион. Поэтому разумный продавец считает, что на рынке действует такое распределение вероятностей из множества $\mathrm{R}$ , которое максимизирует его ожидаемый риск. Сам разумный продавец выбирает такой самофинансируемый портфель, который минимизирует максимальное значение ожидаемого риска. Таким образом, пришли к задаче нахождения минимаксного значения ожидаемого риска продавца: $I_0^{\gamma,\mathrm{Q}} \to \inf_{\gamma\in D} \sup_{\mathrm{Q}\in\mathrm{R}}$.

3. Оптимальный портфель продавца.

**Определение 1.** Самофинансируемый портфель $\pi^* = \{\beta^*, \gamma^*\}$ такой, что $\sup\limits_{Q\in R} I_0^{\gamma^*,Q} = \inf\limits_{\gamma\in D} \sup\limits_{Q\in R} I_0^{\gamma,Q}$, назовем *оптимальным портфелем продавца экзотического опциона* на неполном $\{1,S\}$-рынке, а соответствующую $\gamma^*$ - *оптимальной стратегией продавца*.

Нам понадобятся дополнительные обозначения:

1) $I_n^{\gamma,Q}(S_1,...,S_n) := \mathbf{1}_{\{\tau\ge n\}} E^Q\left(\exp\{X_n^\pi - (X_\tau^\pi - f_\tau)\} | F_n\right)$ - *ожидаемый риск продавца* относительно меры $Q \in R$ в момент времени $n \in \{1,...,N+1\}$;

2) $V_n(S_1,...,S_n) := \inf\limits_{\gamma\in D_{n+1}^{N+1}} \sup\limits_{Q\in R} I_n^{\gamma,Q}(S_1,...,S_n)$ - *верхнее гарантированное значение ожидаемого риска* продавца *в момент времени* $n$;

3) $\Theta := \{q = (q_1,\ldots,q_l) : q_1,\ldots,q_l \ge 0, q_1 + \ldots + q_l = 1\}$.

Чтобы найти оптимальный портфель продавца сначала выведем рекуррентное соотношение для $\{V_n\}_{0\le n\le N+1}$. Затем, основываясь на этом рекуррентном соотношении, получим формулы для оптимального портфеля.

**Теорема 1.** *Случайная последовательность* $\{V_n\}_{0\le n\le N+1}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению:* $V_n(S_1,...,S_n) = \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} +$

$$+\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1}\in D_{n+1}} \max_{q\in\Theta} \sum_{i=1}^{l} q_i V_{n+1}(S_1,...,S_n, S_n(1+a_i)) \exp\{-\gamma_{n+1} S_n a_i\},$$

$$V_N = \mathbf{1}_{\{\tau=N\}} \exp\{f_N\} + \mathbf{1}_{\{\tau>N\}}, \quad V_{N+1} = 1.$$

Пусть $\Phi(S_1,\ldots,S_n;\gamma) := \max\limits_{q\in\Theta} \sum\limits_{i=1}^{l} q_i V_{n+1}(S_1,...,S_n, S_n(1+a_i)) \exp\{-\gamma S_n a_i\}$. Очевидно, что $\Phi(S_1,\ldots,S_n;\gamma)$ выпукла по $\gamma$, причем $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \Phi(S_1,\ldots,S_n;\gamma) = \infty$. Следовательно, нижняя грань в рекуррентном соотношении теоремы 1 достигается. Вычисление этой нижней грани позволяет доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть {1,S}-рынок задан рекуррентным соотношением (1) и имеется самофинансируемый портфель* $\pi^* = \{\beta^*, \gamma^*\}$ *такой, что для любого* $n \in \{0,...,N\}$*:*

*1) его капитал* $X_n^{\pi^*} = \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} f_n +$

$$+\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}\{q^*_{i^*(n+1)} \ln V_{n+1}\left(S_1,...,S_n, S_n\left(1+a_{i^*(n+1)}\right)\right) + q^*_{j^*(n+1)} \ln V_{n+1}\left(S_1,...,S_n, S_n\left(1+a_{j^*(n+1)}\right)\right)\},$$

$X_N^* = \mathbf{1}_{\{\tau=N\}} f_N$, *где* $q_{i^*(n+1)} := \dfrac{|a_{j^*(n+1)}|}{|a_{i^*(n+1)}| + |a_{j^*(n+1)}|}$, $q_{j^*(n+1)} := 1 - q_{i^*(n+1)}$;

*2) количество рискового актива* $\gamma_n^* = \dfrac{X_n^{\pi^*}\left(S_{n-1}\left(1+a_{j^*(n)}\right)\right) - X_n^{\pi^*}\left(S_{n-1}\left(1+a_{i^*(n)}\right)\right)}{S_{n-1}\left(a_{j^*(n)} - a_{i^*(n)}\right)}$, $\gamma_0^* = 0$;

*3) количество безрискового актива* $\Delta\beta_n^* = -\Delta\gamma_n^* S_{n-1}$, $\beta_0^* = X_0^*$, *где номера $i^*(n)$ и $j^*(n)$ таковы, что:* $\max\limits_{q\in\Theta}\sum\limits_{i=1}^{l} q_i \ln \mathrm{V}_n\left(S_1,...,S_{n-1},S_{n-1}(1+a_i)\right)=$

$$= q_{i^*(n)}\ln \mathrm{V}_n\left(S_1,...,S_{n-1},S_{n-1}\left(1+a_{i^*(n)}\right)\right)+q_{j^*(n)}\ln \mathrm{V}_n\left(S_1,...,S_{n-1},S_{n-1}\left(1+a_{j^*(n)}\right)\right),$$

*причем* $a_{i^*(n)}\times a_{j^*(n)}<0$.

*Тогда* $\pi^*=\{\beta^*,\gamma^*\}$ *– оптимальный портфель продавца экзотического опциона.*

4. Совершенный суперхеджирующий портфель экзотического опциона. Покажем, что оптимальный портфель продавца, описанный в теореме 2, является одновременно совершенным суперхеджирующим. Пусть $\{C_n\}_{0\le n\le N+1}$, $C_0=0$, - неубывающая согласованная последовательность, элементы которой имеют экономический смысл *накопленного* на момент времени *n потребления*. Пару $\{\pi,C\}$ называют *портфелем с потреблением* [2]. Для любого $n\in\{0,...,N+1\}$ капитал портфеля с потреблением $\{\pi,C\}$ определяется равенством $X_n^{\pi,C}:=X_n^{\pi}-C_n$ [2].

**Определение 2.** Самофинансируемый портфель с потреблением $\{\pi^*,C^*\}$ будем называть *суперхеджирующим портфелем* экзотического опциона, если для любой $\mathrm{Q}\in\mathrm{R}$ выполняется $\mathrm{Q}\left(X_\tau^{\pi^*,C^*}\ge f_\tau\right)=1$, и *совершенным суперхеджирующим*, если $\mathrm{Q}\left(X_\tau^{\pi^*,C^*}=f_\tau\right)=1$.

**Теорема 3.** *Пусть экзотический опцион задан парой* $(\tau,f_\tau)$ *и* $\pi^*$ *– соответствующий оптимальный портфель продавца в смысле определения 1. Тогда портфель с потреблением* $\{\pi^*,C^*\}$, *где* $\Delta C_n^*=\gamma_n^*\Delta S_n-\Delta\ln\mathrm{V}_n\left(S_1,...,S_n\right)$, $C_0^*=0$, *является совершенным суперхеджирующим портфелем экзотического опциона, причем* $\mathbf{1}_{\{n\le\tau\}}\mathrm{X}_n^{\pi^*,C^*}=\mathbf{1}_{\{n\le\tau\}}\ln\mathrm{V}_n\left(S_1,...,S_n\right)$, *где* $\{\ln\mathrm{V}_n\}_{0\le n\le N+1}$ *удовлетворяет равенству условия 1 теоремы 2.*

**Определение 3.** Совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением $\{\pi^*,C^*\}$ назовем *минимальным совершенным суперхеджирующим*, если для любого $n\in\{0,...,N\}$ и любого другого суперхеджирующего портфеля с потреблением $\{\tilde{\pi},\tilde{C}\}$ справедливо неравенство $\mathbf{1}_{\{n\le\tau\}}X_n^{\pi^*,C^*}\le\mathbf{1}_{\{n\le\tau\}}X_n^{\tilde{\pi},\tilde{C}}$.

**Теорема 4.** *Совершенный суперхеджирующий портфель* $\{\pi^*,C^*\}$, *определенный в теореме 3, является минимальным.*

5. Заключение. Для неполного {1,S}-рынка, заданного марковской цепью (1), доказано, что для любого экзотического опциона всегда существует оптимальный портфель продавца, который является одновременно совершенным суперхеджирующим портфелем с минимальным капиталом. Последнее означает, что полученное решение нельзя улучшить, делая расчет для других функций риска. Приведены формулы для оптимального портфеля и соответствующего портфеля с потреблением. Их использование для конкретных пар $(\tau,f_\tau)$ позволило явно рассчитать бинарный и барьерный опционы на неполном рынке [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hull J. C.* Options, Futures And Other Derivatives. USA: Pearson Prentice Hall, 2009. 836 p.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики (теория). Том 2. Теория. М. : Фазис, 1998. 544 с.
3. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. 496 с.
4. *Гущин А. А.* О верхней цене хеджирования неотрицательных платежных обязательств // Современные проблемы математики и механики. 2013. Т. VIII. Математика. Вып. 3. С. 60-72.
5. *Schachermayer W.* Optimisation and Utility Functions // Documenta Mathematica. 2012. Extra Volume ISMP. P. 455-460.
6. *Шелемех Е. А.* Расчет экзотических опционов на неполных рынках // Экономика и математические методы (принято в печать).

# APPROACHES TO MODELING CAPITAL OF COMMERCIAL BANKS IN THE DYNAMICS

**A. G. Renner, O. N. Yarkova, Ch. V. Pivovarova**

*Orenburg state university, Russia*
E-mail: agrenner@mail.ru, yarkova_on@mail.ru, pivkristina@list.ru

A mixed boundary value problem for partial differential equations of parabolic type was posed. It is based on the stochastic model accounts for the distribution of density in the accumulation of money and material space, which allows evaluating the bank's capital in the dynamics. A simulation model of the dynamics of the bank's capital was formulated in view of investing in risk-free assets in an inflationary environment. Approbation of the models was held on the base of the data of JSC "Bank Orenburg". The estimation of the financial risks of the bank was held.

## Introduction

Commercial Bank is an active element of the market economy, the main purpose of which is the accumulation of funds and the provision of credits. The current financial and banking crisis clearly showed that even the largest banks in Russia which have a sufficiently large capital and fulfill all the requirements of Central Bank of Russia can fall into crisis situations and suffer losses, testing often insurmountable difficulties in settling accounts with debt and creditors. Most often, the failure to fulfill the obligations is connected with the lack of funds, so it is important to monitor the dynamics of the capital of commercial banks to know the moment of entry into the risk zone and prematurely proactively take steps to avoid this situation.

The study of financial management in the credit sector, certain issues about essence of cash flows and management has been the aim of the research of many foreign and domestic authors. As a rule, scientific papers on the topic include cash management issues in corporate structures more often than any other issues. In the works, which were written by Renner A.G., Lenert A.G. [1], was conducted a study evaluating the probability of reducing the volume of deposits of individuals, but wasn't study