О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ПРЕДПРИЯТИЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ УПРАВЛЕНИЯ

Н. И. Голышкин, В. Р. Шебалдин

Саратовский государственный университет, Россия
E-mail: nicholas55@mail.ru, vrsh2007@rambler.ru

В настоящей статье формулируются необходимые условия экстремума для одной задачи оптимального управления.

ABOUT NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE OPTIMAL ECONOMIC GROWTH PROBLEM OF ONE-SECTOR ECONOMY WITH INFINITE HORIZONS

N. I. Golyshkin, V. R. Shebaldin

This article is devoted to the necessary conditions for extremum of optimal control problem.

Рассмотрим модель Рамсея, см. [1], экономического роста предприятия замкнутого типа. Рынки работают бесперебойно, производственные факторы (капитал и труд) существенно не меняются при изменении цен.

Предположим, что $K(t)$ – капитал предприятия, $L(t)$ – трудовые резервы. Пусть в качестве управления $u(t)$ указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала. Таким образом, имеем следующую модель:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \qquad K(0) = K_0, \tag{1}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = L_0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon], \qquad t \in [0, \infty), \tag{3}$$

$$J(u,T) = \int_0^T e^{-\rho t}\left[\ln(1-u(t)) + \ln F(K,L)\right]dt \to max, \qquad T \in [0,\infty), \tag{4}$$

где $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция; функция производства $F(K, L)$ дважды непрерывно дифференцируемая, положительная, однородная функция своих аргументов; $\mu = const$, $\mu > 0$ – заданный коэффициент потери трудовых ресурсов; $\rho > 0$ – коэффициент дисконтирования; $\varepsilon > 0$ – определяет часть капитала, которое необходимо потратить на развитие производства.

В настоящей работе модель рассматривается на бесконечном интервале времени. Также рассматриваются ограничения на фондовооруженность предприятия в фиксированные моменты времени, см. [2], то есть

$$\frac{K(t_j)}{L(t_j)} \geq c_j, \quad t_j \in [0,\infty), \quad j = \overline{1,q}. \tag{5}$$

Доказано, см. [1], что при замене $x(t)=\dfrac{K(t)}{L(t)}$ задача (1)-(4) сводится к следующей:

$$\dot{x}(t)=u(t)f\left(x(t)\right)-\mu x(t), \qquad x(0)=x_0, \tag{6}$$

$$u\in U_\varepsilon, \tag{7}$$

$$x(t_j)\ge c_j, \qquad j=\overline{1,q}, \tag{8}$$

$$J_0(x,u,T)=\int_0^T f_0(x,u,t)\,dt\to\max_{x,u,T}, \qquad T\in[0,\infty), \tag{9}$$

где $f_0(x,u,t)=e^{-\rho t}\left[\ln\left(1-u(t)\right)+\ln f\left(x(t)\right)\right]$, $f(x)=F\left(\dfrac{K(t)}{L(t)},1\right)$.

Для поставленной задачи (6)-(8) можно сформулировать необходимые условия экстремума в виде максиминной задачи.

В данной работе, как и в статье [3], необходимые условия экстремума будут получены с помощью теоремы Дубовицкого-Милютина, см.[4]. Для этой цели сведем исходную задачу на бесконечном интервале времени к задаче оптимального управления на конечном отрезке времени. Обозначим через V множество допустимых управлений в задаче (6)-(8) .

Теорема. Пусть $\left(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{T}\right)$ – оптимальное решение задачи (6)-(8). Тогда существуют такие интегрируемые функции $\psi_j(t)\in R^n$, $j=\overline{0,\,q}$, что

$$\max_{u\in V}\min_{j\in M_0}\int_0^{\hat{T}}\psi_j\left[f_0(\hat{x},u,t)-f_0(\hat{x},\hat{u},t)\right]dt=0,$$

где

$$M_0=M\bigcup\{0\},\ M=\{j\mid \hat{x}(t_j)=c_j,\ j=\overline{1,\,q}\};$$

$$\psi_j(t)=\begin{cases}\overline{\psi_j}(t), & t\in[0,t_j],\\ 0, & t\in(t_j,\hat{T}].\end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М. : Наука, 2007. 253 с.

2. *Ногин В. Д.* Введение в оптимальное управление : учебно-методическое пособие. СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008. 92 с.

3. *Шебалдин В. Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. Деп. в ВИНИТИ. № 2999-В89ДЕП. 1989. 37 с.

4. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 395-453.