

О СВОЙСТВАХ ИНВЕРСНЫХ D-КЛАССОВ ПОЛУГРУППЫ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Д. Г. Явкаев

*Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*
E-mail: danj199416@mail.ru

Изучается строение идемпотентных матриц с элементами из произвольной булевой алгебры в частичных полугруппах матриц произвольных размеров с конъюнктым и дизъюнктым произведением. Показана связь разрешимости матричных уравнений с некоторыми видами идемпотентных матриц.

ON THE PROPERTIES OF INVERSES D-CLASS SEMIGROUPS OF BOOLEAN MATRICES

D. G. Yavkaev

The structure of idempotent matrices in partial semigroups of matrices of arbitrary sizes with elements from arbitrary Boolean algebra with conjunctive and disjunctive multiplications is investigated. The connection of solvability of the matrix equations with some kind of idempotent matrices is shown.

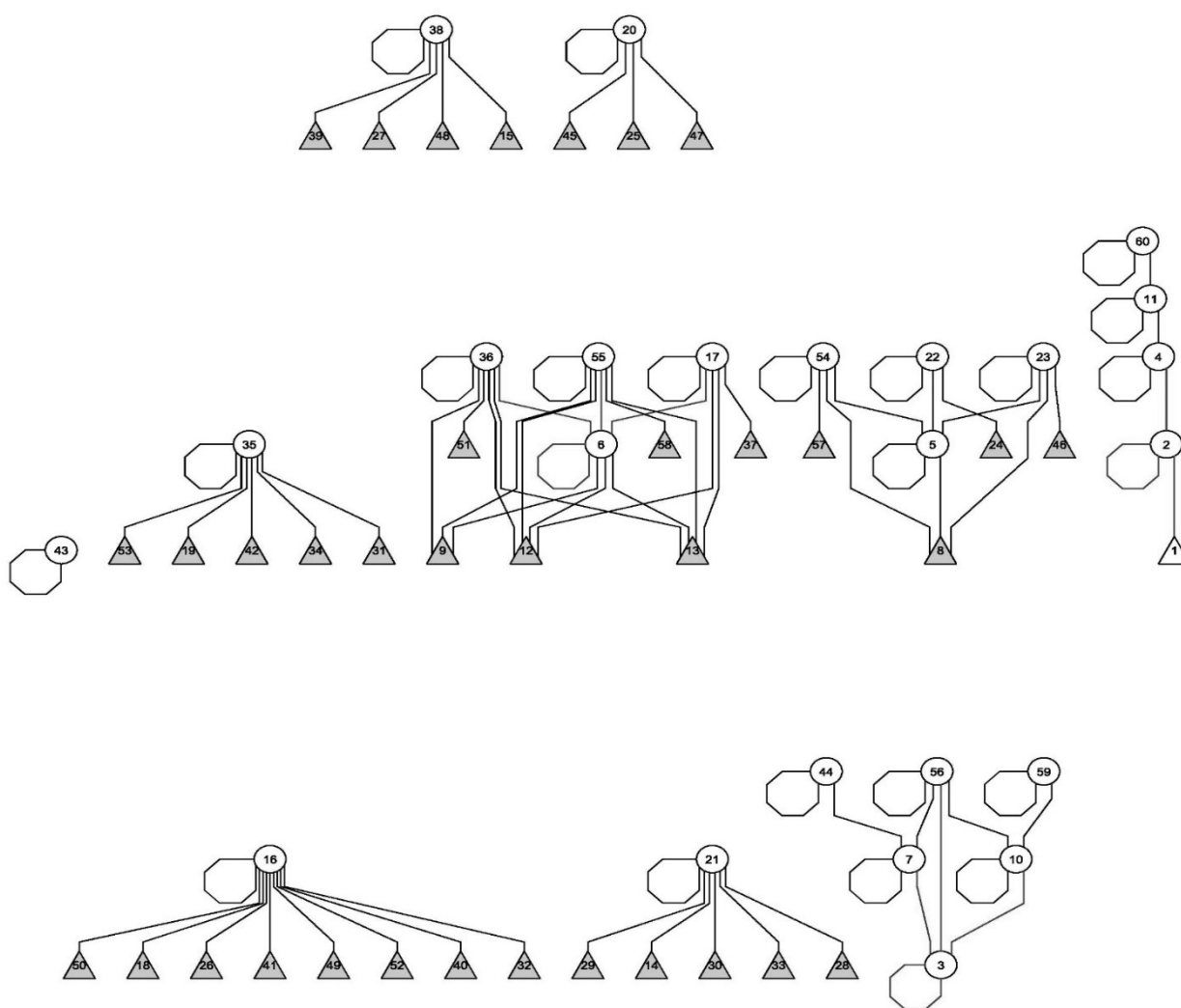
Обозначим множество булевых матриц всевозможных размеров $k \times l$, где $k = 1..n$, $l = 1..n$ через $M_{n \times n}(B)$. Вместе с частичной операцией конъюнктивного умножения Π множество $M_{n \times n}(B)$ образует частичную полугруппу [1], [2]. Пусть D – отношение эквивалентности Грина на $M_{n \times n}(B)$, разбивающее полугруппу на D -классы [3]. Отображение $i: M_{n \times n}(B) \rightarrow M_{n \times n}(B)$, ставящее каждой матрице A вторичный идемпотент $i(A) = ((A \Pi A^{T'})^{T'})$ где T' обозначает одновременное транспонирование и взятие дополнения булевой матрицы (см. [1, 2]).

Из работ [1, 2, 4] следует, что отображение i порождает бинарное отношение на факторе-множестве $M_{n \times n}(B)|_D$, которое представимо в виде конечного ориентированного графа, вершинами которого служат D -классы частичной полугруппы $M_{n \times n}(B)$. Этот граф разбивается на компоненты, которые мы назовем орбитами отображения i на факторе-множестве $M_{n \times n}(B)|_D$. На рисунке показаны орбиты на $M_{4 \times 4}|_D$, содержащие 60 D -классов, которые пронумерованы на рисунке с 1 по 60. Кружками обозначены регулярные классы, а треугольниками – нерегулярные D -классы. Концы стрелок каждой компоненты заканчиваются в классах $D_{16}, D_{17}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{28}, D_{30}, D_{35}, D_{36}, D_{43}, D_{44}, D_{54}, D_{56}, D_{59}, D_{60}$, которые порождаются матрицами следующим

образом. Например, класс D_{22} порожден матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Регулярный D -класс частичной полугруппы $M_{n \times n}(B)$ назовем инверсным, если в каждом его R - и L -подкласса Грина находится ровно один идемпотент. Все указанные на рисунке классы D_{16} , D_{17} , D_{21} , D_{22} , D_{23} , D_{28} , D_{30} , D_{35} , D_{36} , D_{43} , D_{44} , D_{54} , D_{56} , D_{59} , D_{60} являются инверсными. Более того, остальные D -классы полугруппы $M(B)_{4 \times 4}$ - инверсными не являются. Имеет место более общее утверждение.



Орбиты отображения $M_{4 \times 4} | D \rightarrow M_{4 \times 4} | D$

Теорема. Пусть $M_{n \times n}(B)$ - частичная полугруппа матриц всевозможных размеров, не превышающих $n \times n$ с элементами из булевой алгебры $B_2 \{0;1\}$. Тогда орбиты отображения i на факторе-множестве $M_{n \times n}(B) | D$ заканчивают-

ся инверсными D -классами, причем все идемпотенты этих инверсных D -классов являются вторичными. Остальные регулярные D -классы инверсными не являются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц. // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 26-33.
2. Поплавский В. Б. О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 4. С. 181-192.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М. : МИР, 1972. Т. 1. 287 с.
4. Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г. Об инверсных D -классах полугруппы булевых матриц // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого. 2019. С. 112-114.