РАСЧЕТ ФУНКЦИИ ЛОКАЛЬНОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

А. В. Лётчиков[1], Н. А. Неклюдова[2]

[1]*Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия*
[2]*ЧОУ ДО «Академия „Калашников“», Ижевск, Россия*
E-mail: letchi@udm.ru, nekludovanatalia89@gmail.com

В работе исследована модель стохастической волатильности, в которой предполагается, что обратная величина волатильности имеет гамма распределение. Определяя функцию локальной волатильности как меру чувствительности изменения цены опциона к изменению цены и времени исполнения опциона, для исследуемой модели стохастической волатильности построен явный вид зависимости локальной волатильности от цены исполнения опциона.

CALCULATION OF THE LOCAL VOLATILITY FUNCTION IN ONE STOCHASTIC VOLATILITY MODEL

A. V. Letchikov, N. A. Neklyudova

The paper investigates a model of stochastic volatility, in which it is assumed that the inverse value of volatility has a gamma distribution. Defining the local volatility function as a measure of the sensitivity of option price changes to changes in the price and time of option execution, an explicit form of dependence of local volatility on the option exercise price is constructed for the stochastic volatility model under study.

Наиболее часто используемая на практике модель оценки стоимости опционов – это модель Блэка-Шоулза. Классическая формула Блэка-Шоулза для расчета цены европейского колл-опциона без дисконтирования может быть представлена в следующем виде ([1], стр. 228):

$$C(K,T) = F_T \cdot \Phi(d_+) - K \cdot \Phi(d_-),\ d_\pm = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}} \ln\frac{F_T}{K} \pm \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}, \qquad (1)$$

где $F_T = S_0 \cdot e^{\mu T}$ - форвардная цена базового актива, K - цена исполнения опциона, T - дата экспирации опциона, S_0 - начальная стоимость базового актива опциона, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ - функция Лапласа.

Как видно, в формулу (1) входят пять параметров. Два из них определяются условиями опциона – это страйк K и время до исполнения опциона T. Два других определяются финансовым рынком и доступны инвесторам – это текущая цена базового актива S_0 и безрисковая непрерывно начисляемая процентная ставка μ. Только один параметр этой формулы не может быть известен точно – это волатильность базового актива σ^2. Неудивительно, что с момента появления формулы Блэка-Шоулза исследование волатильности стало центральным вопросом, как среди ученых, изучающих теорию финансов и математические модели финансовых временных рядов финансистов, так и среди трейдеров и портфельных менеджеров, использующих изощренные торговые стратегии для получения спекулятивной прибыли или хеджирования финансовых инвестиций.

На практике цены на фактические финансовые активы редко соответствуют расчетным значениям из-за многочисленных случайностей, возникающих в реальном мире, которые невозможно учесть в теоретической формуле. Нетрудно заметить, что рыночные цены опционов с разными страйками для одного и того же актива отличаются от цен, рассчитанных с заданными параметрами по формуле (1). Поскольку единственным параметром формулы Блэка-Шоулза, который нельзя посчитать точно, является волатильность, было предложено для каждого отдельного опциона рассчитывать так называемую предполагаемую волатильность (implied volatility). Она определяется как такое σ^2, при котором текущая рыночная цена опциона равна значению, рассчитанному по формуле (1) (см. [2], стр. 417). Подставляя рыночные цены в левую часть уравнения (1) и решая его относительно σ^2, для каждого конкретного базового актива получаем функцию зависимости σ^2 от страйка K, получившую название улыбки волатильности.

Предполагаемая волатильность как функция от цены исполнения опциона является рыночной оценкой будущей волатильности, поскольку определяется потребностью на финансовом рынке в покупке и продаже соответствующих опционов. Нетрудно понять, что будущая волатильность – это параметр вероятностного распределения цены базового актива в момент исполнения опциона, и она не может зависить от цены исполнения одного опциона. Поэтому понятие предполагаемой волатильности противоречит постоянной будущей волатильности, что и потребовало других теоретических подходов к понятию волатильности.

Одним из таких подходов является понимание волатильности как меры чувствительности цены колл-опциона к изменениям величин K и T. Так появилось понятие функции локальной волатильности (см., например, [3]). Буквально локальная волатильность определяется по следующей формуле:

$$\sigma^2(K,T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}. \qquad (2)$$

Действительно, если взять производную по T и вторую производную по K от форвардной цены колл-опциона C и подставить в правую часть формулы (2), то после сокращений останется волатильность σ^2. На практике формула (2) позволяет строить функцию локальной волатильности по текущим ценам опционов на один актив с разными ценами исполнения опциона и временем исполнения.

Другой подход к проблеме зависимости волатильности от страйка состоит в представлении будущей волатильности в виде некоторого случайного процесса σ_t^2. Такие подходы принято называть моделями стохастической волатильности. В рамках такой постановки вопроса зависимость предполагаемой волатильности можно определить как условное математическое ожидание будущей случайной волатильности относительно будущих цен базового актива.

В работе [4] показано, что при определенных условиях на случайные процессы S_t и σ_t^2 локальная волатильность (2) может быть рассчитана по формуле:

$$\sigma^2(K,T) = M[\sigma_T^2|S_T = K]. \tag{3}$$

При правильном выборе совместного распределения будущей цены базового актива и стохастической волатильности полученная формула позволяет строить явный вид функции локальной волатильности, которая может быть полезна для широкого круга профессиональных участников финансового рынка. Рассмотрим одну из таких моделей стохастической волатильности.

Вывод формулы (1) нетрудно произвести из предположения, что нормированная будущая цена рискового актива S_T/F_T имеет логнормальное распределение с параметрами 0 и $\sigma\sqrt{T}$ (см. [1]). Для удобства исследования часто переходят от самой цены рискового актива к ее логарифму: $y_T = \ln(S_T/F_T)$, называемому логарифмической ценой рискового актива. Очевидно, плотность распределения этой случайной величины равна

$$\phi(y|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}}. \tag{4}$$

Введем вспомогательную случайную величину $u_T = \frac{1}{\sigma^2 T}$. Будем предполагать, что она имеет гамма-распределение с плотностью:

$$g(u) = \frac{1}{(2c)^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2c}},$$

где c и k - параметры гамма-распределения, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ - гамма-функция.

Соответственно из (4) вытекает, что условная плотность распределения логарифмической цены рискового актива, имеет следующий вид:

$$f(y|u) = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u\cdot y^2}{2}}.$$

Совместное распределение случайных величин y_T и u_T в этом случае будет иметь следующую плотность

$$f(y,u) = f(y|u)g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2c)^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{\frac{k+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2c}-\frac{u\cdot y^2}{2}}. \tag{5}$$

Интегрируя полученную функцию по u, находим плотность распределения логарифмической цены:

$$f(y) = \frac{\sqrt{c}\cdot\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(\frac{1}{1+cy^2}\right)^{\frac{k+1}{2}}. \tag{6}$$

Полученная функция является плотностью распределения Пирсона типа VII [5, стр. 340] и может быть использована для оценки неизвестных параметров распределения. Поделив плотность совместного распределения (5) на плотность распределения логарифмической цены (6), получим условную плотность

$$f(y|u) = \frac{(1+cy^2)^{\frac{k+1}{2}}}{(2c)^{\frac{k}{2}+1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} u^{\frac{k+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2c}-\frac{u \cdot y^2}{2}}.$$

Применяя полученное к формуле (3), находим, что

$$\sigma^2(K,T) = M[\sigma_T^2 | S_T = K] = M\left[\frac{1}{u_T \cdot T}\middle| y_T = \ln\left(\frac{\mathrm{K}}{F_T}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2} - 1\right)}{2cT \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \left(1 + c\left(\ln\left(\frac{\mathrm{K}}{F_T}\right)\right)^2\right).$$

Расчетная величина локальной волатильности может быть использована для прогнозирования цен опционов в крайних значениях спектра страйков, представленных на бирже. Пример графика построенной зависимости локальной волатильности от цены исполнения опциона представлен на рисунке.

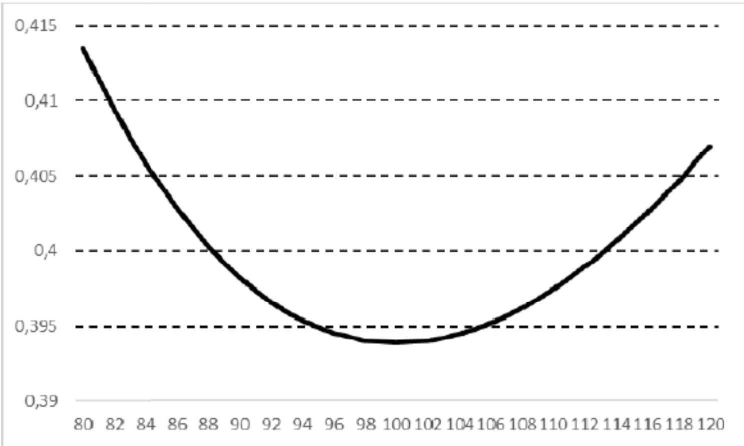

График улыбки волатильности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лётчиков А. В.* Лекции по финансовой математике : учеб. пособие для вузов рек. УМО по образованию в обл. мат. методов в экономике. М. : Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004. 234 с.

2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели / А. Н. Ширяев. М. : ФАЗИС, 1998. 512 с.

3. *Gatheral J.* The Volatility Surface – A Practitioner's Guide // John Wiley & Sons, Inc., Hobokenю New Jersey. 2006. P. 210.

4. *Неклюдова Н. А.* Представление локальной волатильности через условное математическое ожидание стохастической волатильности // Математические методы и интеллектуальные системы в экономике и образовании: Материалы Всероссийской заочной науч.-практич. конф. под ред. А. В. Лётчикова. 2015. С. 3-6.

5. *Джонсон Н. Л.* Одномерные непрерывные распределения : в 2 ч. / Н. Л. Джонсон, С. Коц, Н. Балакришнан; пер. 2-го англ. изд. М. : БИНОМ, Лаборатория знаний. 2012. Ч. 2. 600 с.