МОДЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗЕРНОВЫХ КУЛЬТУР ФЕРМЕРСКИХ ХОЗЯЙСТВ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е. С. Магомедова[1], Р. И. Магомедов[2], Н. Г. Магомедова[1]

[1]*Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия*
[2]*Министерство строительства Республики Дагестан, Махачкала, Россия*
E-mail: magomedova.e.s@mail.ru, magomedov.ri@dagestan.digital

В работе построена математическая модель зерновых культур фермерских хозяйств, используя стохастические дифференциальные уравнения, и приведены примерные методы решения стохастических дифференциальных уравнений.

MODEL ESTIMATION OF GRAIN CROPS OF FARMS BASED ON DIFFERENTIAL STOCHASTIC EQUATIONS

E. S. Magomedova, R. I. Magomedov, N. G. Magomedova

In this paper, a mathematical model of grain crops of farms is constructed using stochastic differential equations and approximate methods for solving stochastic differential equations are given.

Для математического моделирования урожайности зерновых культур фермерского хозяйства необходимо ввести некоторые допущения и упрощения, а также наложить на параметры и функции условия, описывающие динамику роста урожайности, реализации зерновых, дать физическую и экономическую интерпретацию рассматриваемых величин и использовать принцип сплошной среды, так как сбор урожая зерновых культур может продолжаться определенное время в зависимости от созревания различных культур и сбор урожая также происходит скачкообразно. Аналогичный расход также может происходить скачкообразно и эти изменения определяются кусочно – постоянной функцией, зависящей от времени. Поэтому используется пороговая тета-функция $\theta(t)$. Затем эту функцию заменяем гладкой функцией $\tilde{\theta}(t)$, где пороговая функция

$$\theta(x, x_0) = \begin{cases} 0, \text{при } x < x_0 \\ 1, \text{при } x > x_0 \end{cases}.$$

Предположим, к моменту времени $t \epsilon T$ урожай зерновых культур собрано $x(t)$ единиц измерения. Для построения математической модели функцию $x(t)$ будем считать непрерывно изменяющейся во времени и достигает сбор и потребление нужного размера, где единица изменения $[C] = {}^{\text{руб.}}/_{\text{год.}}$

Кроме этого, на функцию $x(t)$ налагаем условие дифференцируемости т.е. скорость изменения будет

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t). \quad (1)$$

Эту скорость (1) можно рассчитать различными способами и обозначить через $F(x(t), t)$, т.е.

$$x'(t) = F(x, t). \tag{2}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее доходы и расходы хозяйства. Если в начальный момент времени $t = 0$ определены доходы и расходы, то получим начальное условие

$$x|_{t=0} = x_0. \tag{3}$$

В результате получим задачу Коши (2), (5) для обыкновенного дифуравнения.

При практической реализации функцию можно определить различными способами в зависимости от типа почвы, региона, природных условий, сорта, вида культуры, технологии обслуживания, сбора, хранения и прочего и считать заданной функцией.

Функцию $F = F(x, t)$ для эмпирической проверки по статистическим данным примерно можно представить в виде

$$F = D - R,$$

где $D \geq 0, D = D(x, t)$ - доходы фермерского хозяйства, при переводе урожая килограммы в рубли при текущих ценах, а $R = R(x, t)$ – расходы хозяйства, за год, $R > 0$.

Если $R \to 0$, то доходы увеличиваются, если $R >> 0$, то хозяйство идет к разорению и банкротству.

Рассмотрим примерные расчеты определения значений D и R.

Структуру доходов D можно определять как сумму значений твердых плановых доходов D_0, зависящих от вида зерновой культуры, места нахождения хозяйства или региона, от многолетних плановых результатов за предыдущие годы и т.д. $D_0 = D_0(t)$; $[D_0] = {}^{\text{руб.}}/_{\text{мес.}}$

D_1 - доходов сверх плановых, за счет новых сортов, ухода, применения новых современных агротехнологий, климата и т.д.

Поэтому

$$D_1 = \alpha x(t)\theta(x, x_0), \text{ и } D = D_0(t) + \alpha x(t)\theta(x, x_0),$$

где коэффициент α зависит от нового сорта, климата, а функция $\theta(x, x_0)$ – пороговая тета – функция, которую можно заменить ступенчатую θ – функцию, через гладкую $\tilde{\theta}(x, x_0)$, для обеспечения дифференцируемости.

Теперь рассмотрим примерные расходы хозяйства за календарный год. Эти расходы состоят из нескольких слагаемых. Например, R_0 – минимальные повседневные расходы на содержание всего хозяйства «на плаву». R_1 – повседневные расходы, обеспечивающие благополучное содержание хозяйства, семьи, механизмов, сельхозинвентаря, топлива и т.д. за счет сверхплановой прибыли. Будем считать, что такие расходы обеспечивают полу-благоприятное существование.

Если через y_0 обозначим минимальное средства обеспечивающее минимальное качество жизни хозяйства, то

$$R_1 = C_1 \frac{x}{x-y_1} \theta(x, y_0),$$

где $C_1 = [C_1] = {}^{\text{руб.}}/_{\text{мес.}}$ – коэффициент, позволяющий обеспечение хозяйству более-менее благополучие, y_1 – накопления, обеспечивающие полу- благоприятное существование, y_0 – минимальные накопления, позволяющие начать улучшение качества фермерского хозяйства.

Хозяйство достигает расцвета, если оно смогло улучшить и позволить иметь свой парк сельхозмашин, закупить элитные посевные семена и т.д. На такие средства нужны также большие расходы. Их обозначим через R_2 и приведем примерную формулу для таких средств. Для этого обозначим через C_2 - размерность $[C_2] = {}^{\text{руб.}}/_{\text{мес.}}$, – обеспечивающие роскошное существование хозяйства, z_1 – цену разницы дешевого элитного товара, z_2 – цену товара «средней» роскоши. В результате имеем функцию

$$R_2 = C_2 \frac{x - z_1}{(x - z_1) + (z_2 - z_1)} \theta(x, z_1).$$

Тогда, представив выше полученные значения в равенство $R = R_0 + R_1 + R_2$, учтя доходы D и заменяя пороговую θ – функцию гладкой функцией $\tilde{\theta}(x, x_0)$, получим примерное значение функции $F(x, t)$ и равенство (2) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = D_0(t) + \alpha x(t)\tilde{\theta}(x, x_0) - R_0(t) - C_1 \frac{x}{x + y_1} \tilde{\theta}(x, y_0) - C_2 \frac{x - z_1}{(x - z_1) + (z_2 - z_1)} \tilde{\theta}(x, z_1),$$

где $\alpha, x_0, y_0, y_1, z, z_2, C_1, C_2$ зависят от переменной времени t из-за инфляции.

Более детальное описание доходов и расходов фермерского хозяйства, экономически можно уточнять.

Кроме запланированного развития рассматриваемого процесса в этот процесс может вмешаться случайный фактор. Для учета этого случайного фактора его обозначим как случайную непрерывную величину $X = X(t)$, также зависящую от времени t и которая за промежуток Δt будет изменяться. Это случайная величина $X = X(t + \Delta t)$. Для математического описания такого явления введем понятие стохастического дифференциала [1]

$$dX = X(t + \Delta t) - X(t), \tag{4}$$

и добавим (4) к уравнению (2)

$$dx = F(x; t)dt + dX. \tag{5}$$

Полученное уравнение считается стохастическим дифференциальным уравнением ([1],[2]). В общем виде, когда рассматриваются несколько фермерских хозяйств, равенство (5) запишется в виде

$$dx = F(x; t)dt + G(x, t)dX, \tag{6}$$

где $F(x; t), G(x, t)$ - неслучайные функции, X – Марковский процесс.

При следующей интерпретации уравнения (6), для стохастического дифференциала (4) величину $X(t)$ необходимо понимать, как реализованную случайную величину, принявшую в момент времени t значение $X(t) = y$, а случайную величину $X(t + \Delta t) = z$, определяемую плотностью вероятностей

$$\rho(z) = \rho(y; t; z, t + \Delta t),$$

как марковский процесс. Поэтому уравнение (6) можно записать в конечных разностях

$$x(t + \Delta t) - x(t) = F(x, t)\Delta t + G(x, t)\big(X(t + \Delta t) - X(t)\big),$$

И, используя соответствующие обозначения, разбив временной интервал на элементарные отрезки Δt , можно записать расчетное равенство в виде

$$X_{i+1} = F(x_{i+1}t)\Delta t_i + G(x_i, t_i)z_{i+1},$$

и численно реализовать ([1], [4], [5]).

Аналитически стохастическое дифференциальное уравнение можно исследовать с помощью стохастического интеграла Ито [2].

Вводя разбиение интервала числовой оси $0x(a, b)$ на элементарные отрезки $\Delta x_i, (i = 1,2, \dots, n)$, и временной отрезок T разбив на элементарные отрезки $\Delta t > 0, (i = 1,2, \dots, n)$, производя суммирование по обеим переменным, переходя к интегрированиям и вводя функцию $U(x, t)$, как плотность распределения урожайности по накоплениям объединениям нескольких фермерских хозяйств, можно вывести дифференциальное уравнение для функции $U(x, t)$ с начальными условиями (3) в виде параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(F(U) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(U) + f,$$

где $U = U(x, t)$- функция плотности распределения урожайности объединения нескольких фермерских хозяйств ([1], [3], [4], [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерофеенко В. Т., Козловская И. С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике / Курс лек. М : Едиториал. УРСС, 2004.
2. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теории и приложения. Пер. с англ. М. : МИР, ООО «Изд-во АСТ», 2003.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М : Высш. шк. 1988. Т. 2.
4. *Магомедов И. И., Магомедов Р. И.* Математическое моделирование мощности фирмы с помощью стохастических дифференциальных уравнений // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 2. С. 112-122.
5. *Магомедов Р. И., Магомедов И. И., Магомедова Е. С.* Моделирование изменения количества воды в водохранилище с помощью стохастического дифференциального уравнения // Вестник Дагестанского Госуниверситета «Естественные науки». 2020. Т. 35. Серия 1. Вып. 1. С. 53-59.