

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ, МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ АЛЛЕНА И КОНКУРЕНЦИЕЙ ЗА РЕСУРС РАБОЧИХ МЕСТ

С. А. Попель, Е. Ю. Лискина

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина, Россия
E-mail: s.popel0810@stud.rsu.edu.ru, e.liskina@365.rsu.edu.ru

В статье представлено построение системы разностных уравнений на основании модифицированной модели типа Солоу. Построенная система дополнена факторами внешних инвестиций и миграции. Обосновано добавление этих факторов с экономической точки зрения. Полученная система проверена на идентифицируемость. Обсуждается дальнейшее исследование данной модели.

CONSTRUCTION OF A DYNAMIC MODEL OF THE REGION'S ECONOMY WITH DISCRETE TIME, MODIFIED ALLEN PRODUCTION FUNCTION AND COMPETITION FOR THE RESOURCE OF JOBS

S. A. Popel, E. U. Liskina

In the article, we presented the construction of a system of difference equations based on a modified Solow-type model. We supplemented the built system with factors of external investment and migration, justified the addition of these factors from an economic point of view. We checked the resulting system for identifiability. Further study of this model is discussed.

Введение. В работе [1] была обоснована и исследована динамическая односекторная модель экономики типа Солоу вида

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + \alpha F(K, L), \\ \dot{L} = vL \left(1 - \frac{L}{M}\right), \end{cases} \quad \#(1)$$

где K – капитал, L – труд, μ – норма амортизации, α – доля национального дохода, идущая на увеличение капитала, $\alpha, \mu \in (0,1)$; v – темп роста ресурса «труд», $v \in (-1,1)$, M – максимальная численность населения в регионе; $F(K, L)$ – производственная функция $F(K, L) = KL(a_0KL - a_1K^2 - a_2L^2)$, где a_0, a_1, a_2 – положительные коэффициенты, являющаяся модификацией функции Аллена [2].

С использованием показателей экономического роста [3, С. 97–99] дискретный аналог этой модели может быть представлен в виде

$$\begin{cases} K_t - K_{t-1} = -\mu K_{t-1} + \alpha F(K_{t-1}, L_{t-1}), \\ L_t - L_{t-1} = vL_{t-1} \left(1 - \frac{L_{t-1}}{M}\right). \end{cases}$$

Обозначим $F(K_{t-1}, L_{t-1}) = X_{t-1}$ – ВРП рассматриваемого региона. По определению производственной функции, её значение равно выпуску продук-

ции рассматриваемого экономического субъекта. В рассматриваемой задаче экономическим субъектом является регион, поэтому значение производственной функции этого региона совпадает с его ВРП. Таким образом, получим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} K_t = (1 - \mu)K_{t-1} + \alpha X_{t-1}, \\ L_t = (1 + v)L_{t-1} - \frac{v}{M}L^2_{t-1}. \end{cases} \#(2)$$

Цель работы заключается в построении системы разностных уравнений на основе системы (2), учитывающей фактор миграции и наличие инвестиций в экономику региона.

Модификация системы (2). Система (2) описывает замкнутую экономику. В реальности таких регионов не существует. С точки зрения правдоподобности полученной модели целесообразно добавить фактор внешних инвестиций в экономику региона. Будем считать, что инвестиции поступают в экономику мгновенно, но их эффект наступает только в следующем от поступления моменте времени. Обозначим I_{t-1} – инвестиции за период, предшествующий рассматриваемому, идущие на расширение производства в текущий момент времени [4, с. 75], где γ – доля инвестиций, идущая на расширение производства.

Помимо внешних инвестиций, в любом регионе наблюдается миграция экономически активного населения [2]. На численность работоспособного населения в текущий период напрямую влияет миграция в момент времени, предшествующий рассматриваемому. Обозначим Q_{t-1} – миграцию в момент времени $t - 1$. Система (2) примет вид

$$\begin{cases} K_t = (1 - \mu)K_{t-1} + \alpha X_{t-1} + \gamma I_{t-1}, \\ L_t = (1 + v)L_{t-1} - \frac{v}{M}L^2_{t-1} + \beta Q_{t-1}, \end{cases} \#(3)$$

где β – темп прироста миграции.

Проверим систему (3) на идентифицируемость [5, с. 188]. В первом уравнении системы экзогенными переменными являются переменные X_{t-1} и I_{t-1} , эндогенными, соответственно, K_t, K_{t-1} . Во втором уравнении экзогенной переменной является Q_{t-1} , а эндогенными – L_t, L_{t-1} и L^2_{t-1} . Таким образом, для первого уравнения системы (3) условие $H = D + 1$, где H – число эндогенных переменных, D – число экзогенных переменных системы, не содержащихся в первом уравнении системы, примет вид $2 = 1 + 1$ – верное равенство, значит необходимое условие идентифицируемости для первого уравнения системы (3) выполнено. Для второго уравнения системы равенство $H = D + 1$ будет иметь вид

$3 = 2 + 1$; оно является верным, значит и для второго уравнения системы необходимое условие выполнено. Проверим достаточное условие идентифицируемости. Матрица A коэффициентов при переменных, не входящих в одно из уравнений системы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu & \alpha & \gamma \\ 1 + v & -\frac{v}{M} & \beta \end{pmatrix},$$

Её минор второго порядка

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ -\frac{v}{M} & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta + \frac{v\gamma}{M} \neq 0,$$

значит $\text{rang}(A) = 2$. Число экзогенных переменных системы $D = 3$, достаточное условие идентифицируемости $\text{rang}(A) \geq D - 1$ выполняется. Таким образом, система (4) является идентифицируемой.

Вывод. На основе модели (1) с непрерывным временем, построена модель (3) с дискретным временем, пригодная для идентификации коэффициентов с помощью анализа данных. Модель дополнена новыми факторами – инвестицией и миграции, что делает её более реалистичной с экономической точки зрения. Для полученной системы (4) доказана её идентифицируемость.

Дальнейшее исследование модели заключается в идентификации коэффициентов системы (4) методами регрессионного анализа, определении вида функции $I(t)$ фактора внешних инвестиций путём анализа временных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попель С. А. Построение решения задачи Коши односекторной динамической модели экономики с модифицированной производственной функцией Аллена и конкуренцией за ресурс рабочих мест // 72-я Междун. студенч. науч.-технич. конф., 2022. С. 478-480.
2. Абрамов В. В. Стационарные состояния в модели односекторной экономики // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. 2021. С. 4-9.
3. Симонов П. М. Экономико-математическое моделирование учеб. пособие: в 2 ч. 2019. Ч. 1. 230 с. [Электронный ресурс]: URL: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/economiko-matematicheskoe-modelirovanie-simonov-1.pdf> (дата обращения: 10.10.2022).
4. Лискина Е. Ю. Исследование трехфакторной динамической системы экономики региона, учитывающей конечное потребление и ограниченные ресурсы // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. № 148. С. 75-82.
5. Эконометрика: учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. М. : Финансы и статистика, 2002. 344 с.