ОПТИМИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДОХОДНОСТИ И РИСКУ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ РИСКОВЫХ БУМАГ

Я. С. Подуст

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия
E-mail: yanapodust1@yandex.ru

В рамках портфельной теории Г. Марковица - Д. Тобина рассматривается задача по формированию портфеля ценных рисковых бумаг. В ней, при заданных ограничениях снизу на доходность и сверху на риск, требуется максимизировать минимум из отклонений квадратов доходности и риска искомого портфеля от квадратов их заданных предельных значений при заданном соотношении этих отклонений. Максимальное значение целевой функции данной задачи интерпретируется как мера устойчивости найденного портфеля по доходности и риску.

Доказано, что искомый портфель является эффективным по Марковицу, получено аналитическое решение задачи.

OPTIMIZATION OF STABILITY IN TERMS OF PROFITABILITY AND RISK OF A PORTFOLIO OF RISKY SECURITIES

Ya. S. Podust

Within the framework of the portfolio theory of G. Markovitz - D. Tobin, the problem of forming a portfolio of risky securities is considered. In it, given the restrictions from below on profitability and from above on risk, it is required to maximize the minimum deviations of the squares of profitability and risk of the desired portfolio from the squares of their established limits with a given ratio of these deviations. The maximum value of the objective function of this task is interpreted as an indicator of the stability of the found portfolio in terms of profitability and risk.

It is proved that the desired portfolio is Markowitz-efficient, and an analytical solution to the problem is obtained.

Для рассматриваемой здесь экстремальной задачи по формированию портфеля ценных рисковых бумаг примем обычные обозначения ([1]-[2]) из теории Г. Марковица - Д. Тобина:

n - количество видов ценных бумаг, рассматриваемых на включение в портфель;

x_i - доля капитала инвестора, вкладываемого в ценные бумаги i-го вида;

R_i - случайная величина доходности ценных бумаг i-го вида, если в них вложен весь капитал; $m_i = M[R_i]$ - математическое ожидание доходности ценных бумаг i-го вида;

$x = (x_1,...,x_n)^T \in R^n$, $m = (m_1,...,m_n)^T$, $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$, $V = (V_{ij})_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,n}}$
$I = (1,...,1) \in \mathbb{R}^n$ – матрица ковариации,

При постановке задачи будем исходить из того, что инвестор хотел бы иметь портфель с ожидаемой доходностью m_p не менее заданного значения m^*_p и риском σ_p не более заданного значения σ^*_p. И при этом, допуск на возможные отклонения квадратов доходности и риска от соответствующих квадратов их предельных значений был бы максимально возможным при дополни-тельном условии заданного соотношения этих допусков.

Математическая формализация этой задачи имеет вид:

$$min\{k(m^T x)^2 - ((m_p^*)^2), (\sigma_p^*)^2 - (x^T V x)\} \to \max_{x: I^T x = 1}. \tag{1}$$

Здесь k выражает соотношение отклонений, о которых говорилось выше.

Доказано следующее:

<u>Утверждение.</u> 1) Предположим портфель (m^*_p, σ^*_p) не является эффек-

тивным (по Марковицу), тогда решением задачи (1) является эффективный портфель, ожидаемые доходность, риск и структура распределения капитала которого могут быть выражены формулами:

$$m_p = \frac{-2\beta + \sqrt{4\beta^2 - 4(k+\alpha)(\gamma - k(m_p^*)^2 - (\sigma_p^*)^2)}}{2(k+\alpha)},$$

$$\sigma_p^0 = (\alpha(m_p^0)^2 + 2\beta m_p^0 + \gamma)^{\frac{1}{2}}$$

$$x^0 = b + m_p^0 c.,$$

2) Имеет место равенство:

$$k((m_p^0)^2 - (m_p^*)^2) = (\sigma_p^*)^2 - (\sigma_p^0)^2.$$

Здесь $\alpha = c^T V c$, $\beta = b^T V c$, $\gamma = b^T V b$,

$$b = \frac{1}{d}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m), \quad c = \frac{1}{d}(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I)$$

$$a_{11} = I^T V^{-1} I, \quad a_{12} = I^T V^{-1} m,$$

$$a_{22} = m^T V^{-1} m, \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.,$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюгин В. И.* Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа : учебн. пособие. М. : Дело, 2003. 230 с.

2. *Дудов С. И.* Оптимальное портфельное инвестирование : учебн. пособие. С. : Изд-во СГУ, 2008. 60 с.