ОПТИМИЗАЦИЯ ГРУППИРОВКИ ПЛАТЕЖЕЙ

А. С. Величко[1], Д. А. Суханов[2]

[1]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*
[2]*НОЦ ФНС России и МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
E-mail: velichko.as@dvfu.ru

В работе рассматривается математическая модель оптимизации группировки платежей на примерно равные суммы для задачи выравнивания потока платежей во времени. Такая задача возникает, например, при минимизации сумм уплачиваемых комиссионных платежей. В качестве критерия минимизируемого риска как меры «неравномерности» потока платежей выбирается манхэттенское расстояние между суммами группированных платежей. Задача относится к классу задач бинарного программирования с нелинейной целевой функцией. В работе показано ее эквивалентное представление в виде задачи смешанного бинарного линейного программирования, что делает возможным применение точных алгоритмов.

OPTIMIZING PAYMENT GROUPING

A. S. Velichko, D. A. Sukhanov

The paper considers a mathematical model for optimizing the grouping of payments of approximately equal amounts for the problem of equalizing the flow of payments over time. Such a problem arises, for example, when minimizing the amounts of commission payments. The Manhattan distance between the amounts of grouped payments is chosen as the criterion for the minimized risk. The problem belongs to the class of binary programming problems with a nonlinear objective function. The paper shows its equivalent representation in the form of a mixed linear binary programming problem which makes it possible to use precise algorithms.

Введение. В работах [1], [2] рассматривались прикладные задачи оптимизации потока инвестиционных и налоговых платежей. Развитие прикладных задач этого направления связано с необходимостью решать более сложные задачи распределения платежей. Одной из них является группировка платежей по различным критериям, одним из которых является равномерность суммарных платежей. Похожие задачи возникают при балансировке торговых счетов [3] для минимизации комиссий банков.

Математическая модель.

Рассмотрим частный случай задачи группировки платежей на 2 группы. Пусть имеются N сумм расходов b_i, которые требуется наиболее равномерно распределить между этими двумя группами.

Определим неизвестные бинарные переменные x_i так что $x_i = 1$, если i-ая сумма расходов b_i включена первую группу, $x_i = 0$ в противном случае.

Тогда $\sum_i b_i x_i$ – сумма расходов, включаемая первую группу, а сумма расходов во второй группе будет равна $\sum_i b_i(1 - x_i) = \sum_i b_i - \sum_i b_i x_i$. Определим меру равномерности этих сумм платежей как $v = |\sum_i b_i x_i - \sum_i b_i(1 - x_i)|$.

Задача целочисленной оптимизации будет иметь вид:

$$\min\left|\sum_i b_i x_i - \sum_i b_i(1-x_i)\right|. \quad (1)$$

С точки зрения теории оптимизации задача (1) относится к задаче целочисленного программированию с нелинейной недифференцируемой целевой функцией из-за наличия функции взятия абсолютной величины (модуля), и существующими методами целочисленной оптимизации напрямую не может быть решена. Однако, такую задачу можно упростить, преобразовав её к задаче смешанно-целочисленного линейного программирования (mixed-integer linear programming, MILP) [4].

Из определения функции абсолютной величины (модуля) следует, что

$$v \geq 2\sum_i b_i x_i - \sum_i b_i, \quad (4)$$

$$v \geq -2\sum_i b_i x_i + \sum_i b_i, \quad (5)$$

Оптимизируемая функция (1) примет вид

$$\min v. \quad (6)$$

Теперь задача (4)-(6) относится к классу смешанного бинарного линейного программирования, поскольку содержит как бинарные переменные x_i, так и нецелочисленную неизвестную переменную v.

В целочисленных задачах важен вопрос возможной неединственности получаемых решений. Предположим, что ранее для задачи (4)-(6) уже получено M различных решений задачи $x_i^{(m)}, m = 1, \dots M$. Тогда получить ещё одно неединственное решение можно, вводя в целевой функции задачи «штрафную» функцию в виде обобщенной метрики разности $(x_i - x_i^{(m)})$ с показателем k:

$$\min\left\{v - \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_i^{(m)}\right|^k\right\}.$$

Для $k = 1$ с помощью вышеописанной методики возможно представление этой задачи в виде смешанной бинарной линейной задачи.

Обобщенная математическая модель. Обобщим эту постановку для случая разбиения платежей на K групп.

Пусть x_{it} – бинарная переменная, равная 1, если платеж i относится к группе t. Тогда $v_t = \sum_i b_i x_{it}$ – сумма расходов, включаемая в группу t.

Условие

$$\sum_t x_{it} = 1 \quad (7)$$

означает, что платеж i входит в каждую из групп только один раз.

Минимизируемый критерий выравнивания потока платежей будет иметь вид:

$$\sum_{p<q} |v_p - v_q|. \tag{8}$$

Для целевой функции (8) обозначим $y_{s(p,q)} = |v_p - v_q|$, и применяя технику, описанную выше для случая двух групп, получим

$$y_s \geq \sum_i b_i x_{ip} - \sum_i b_i x_{iq}, \tag{9}$$

$$y_s \geq -\sum_i b_i x_{ip} + \sum_i b_i x_{iq}. \tag{10}$$

Оптимизируемая функция (8) примет вид

$$min \sum_t y_s. \tag{11}$$

Задача с целевой функцией (11) имеет 3 группы ограничений: (7), (9), (10).

Поскольку для K групп число индексов s равно $\frac{K^2-K}{2}$, количество ограничений рассматриваемой задачи равно $N + K^2 - K$. Число неизвестных в такой задаче равно $NK + \frac{K^2-K}{2}$. Таким образом, размерность решаемой задачи может оказаться высокой, что стимулирует использование приближенных методов и алгоритмов.

Программную реализацию методов решения для данного класса задач можно, например, найти в свободно распространяемом пакете научных вычислений SciPy [5]. Это одна из первых библиотек языка python, знакомство с которой начинается у специалистов в области data science: она содержит большой набор функций для научных вычислений, в том числе имеет инструменты для решения оптимизационных задач, находящихся в модуле optimize. Начиная с версии 1.9.0, появилась возможность решения задачи смешанно-целочисленного линейного программирования с помощью функции milp и linprog [6]. В качестве солвера для таких задач по умолчанию используется HiGHS - в нём реализованы симплекс метод (highs-ds) и метод внутренней точки (highs-ipm). При запуске решения по умолчанию выбирается один из методов, присутствует возможность задать нужный метод.

Численный пример. Предположим, что суммы платежей в размере 1, 3, 5, 8, 13, 14, 19, 20, 23, 24 тыс. рублей, в сумме составляющие 130 тыс. руб. необходимо разбить на примерно равные 2 группы. Решением является, например, набор сумм 5, 8, 13, 19, 20, равный в точности 65 тыс. руб., что является ровно половине от 130 тыс. руб. Однако, это не единственный способ выбора – возможен набор расходов 8, 14, 20, 23 тыс. руб.

Возможно задание дополнительного условия в задаче, чтобы минимизировалось количество слагаемых в получаемой сумме.

Целочисленный характер задачи демонстрирует нетривиальность и возможную неединственность получаемых решений задачи. Большое количество небольших сумм расходов и число требуемых группировок усложняет получение решения без использования специальных приближенных алгоритмов и методов оптимизации.

Выводы. Предложенная математическая модель оптимизации группировки потока платежей показывает возможность их выравнивания и позволяет минимизировать возможные риски сильного отклонения сумм платежей от предписанных или выбираемых пороговых значений. Представление задачи в виде задачи смешанного бинарного линейного программирования делает возможным применения точных алгоритмов. Однако, «проклятие размерности» может потребовать использования специальных приближенных алгоритмов. Работа может быть использована экономическими агентами в финансовом планировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, проект № 075-15-2022-1143 «Передовые инженерные Школы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Величко А. С.* Оптимизация финансирования инвестиционных проектов // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. 2022. № 7. С. 41-44.
2. *Величко А. С., Бухтояров В. В.* Финансовая оптимизация налоговых вычетов // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками. 2023. № 8. С. 217-221.
3. *Velasco J.* What is Load Balancing for Merchant Accounts? [Electronic resource]. URL: https://kount.com/blog/what-is-load-balancing-merchant-accounts (access date: 25.09.2024).
4. *Bragin M. A.* Survey on Lagrangian relaxation for MILP: importance, challenges, historical review, recent advancements, and opportunities // Ann Oper Res. 2023. [Electronic resource]. URL: https://doi.org/10.1007/s10479-023-05499-9 (access date: 25.09.2024).
5. *Virtanen P., Gommers R., et al.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature Methods. 2020. Vol. 17. No. 3. P. 261-272.
6. SciPy. Fundamental algorithms for scientific computing in Python. [Electronic resource]. URL: https://scipy.org/ (access date: 25.09.2024).