АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ОБРАТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЁТА ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

А. В. Васильева, И. Е. Тананко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия
E-mail: varyukhinaav@gmail.com, tanankoie@info.sgu.ru

Рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания, в которой перемещаются требования одного класса. Сформулирована и решается задача определения вектора интенсивностей потоков в системы обслуживания, обеспечивающего заданные значения математического ожидания числа требований в каждой системе обслуживания. Проведен численный эксперимент, подтверждающий приемлемую точность разработанного метода.

ANALYSIS OF THE APPLICABILITY OF THE REVERSE INTEGRAL METHOD FOR CALCULATING CLOSED QUEUING NETWORKS WITH OPTIMAL FLOWS

A. V. Vasileva, I. E. Tananko

A closed exponential queuing network with one class of customers is considered. The problem of determining the optimal vector of incoming flow intensities guarantees prescribed target values of the mean number of customers at each service node is formulated. The problem is then solved, and a numerical experiment is carried out, demonstrating the acceptable accuracy of the proposed method.

В настоящее время существует необходимость проводить анализ и оптимизацию вычислительных систем, систем передачи и обработки информации, распределенных информационных систем и других дискретных стохастических сетевых систем [1]. Удобными математическими моделями таких систем являются сети массового обслуживания различных классов [2]. Совершенствование теории и методологии сетей массового обслуживания дало возможность успешно решать задачи, связанные с анализом, оптимизацией и синтезом таких сетей обслуживания. Синтез сети с заданными параметрами подразумевает определение параметров сети, которые приведут к требуемым характеристикам, например, к заданному вектору математического ожидания (м. о.) длительностей пребывания требований в системах сети [3].

В данной работе представлен метод синтеза оптимального вектора интенсивностей потоков при заданном векторе математического ожидания числа требований в системах замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания.

Рассмотрим замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания, состоящую из L систем массового обслуживания S_i типа $M/M/1$ с интенсивностями обслуживания μ_i, $i=1,...,L$. В сети циркулирует N требований одного класса. Дисциплина обслуживания требований – FCFS.

Обозначим λ_i – интенсивность входного потока требований в систему S_i, $x_i = \lambda_i / \mu_i$, $i = 1,...,L$, $n = (n_i)$ – вектор состояний сети обслуживания, n_i – число требований в системе S_i, $i = 1,...,L$.

Известно, что стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания [4] имеет вид:

$$P(n_1,...,n_L) = \frac{1}{G(N,L)} \prod_{i=1}^{L} x_i^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^{L} n_i = N.$$

Нормализующая константа

$$G(N,L) = \sum_{n \in Q(N,L)} \prod_{i=1}^{L} x_i^{n_i},$$

где $Q(N,L)$ – пространство состояний рассматриваемой сети массового обслуживания.

Заметим, что решение задачи анализа сетей обслуживания связано с определением характеристик по заданным параметрам этих сетей. Задача синтеза во многом является обратной задаче анализа и заключается в определении одного или нескольких параметров при обычно одной заданной характеристике сети обслуживания.

Проводя расчет характеристик замкнутой сети массового обслуживания по начальным параметрам, существует сложность вычисления нормализующей константы $G(N,L)$ – она вычисляется для каждого числа требований от 0 до N с помощью рекурсивного алгоритма, что приводит к точному результату в прямом ходе вычислений, но делает обратный процесс расчета параметров через итоговые характеристики невозможным.

Таким образом, требуется определить рабочие формулы для приближенного вычисления нормализующей константы и связи итоговых характеристик с ней, чтобы провести синтез замкнутой сети массового обслуживания на основании заданного итогового вектора м. о. числа требований в системах.

Введем производящую функцию, которая сходится при $|z| < (\max_i |x_i|)^{-1}$. Используя интегральное представление коэффициента при z^N и применяя теорему о вычетах, получаем аналитическое выражения для $G(N,L)$ [5]:

$$G(N,L) = \sum_{i=1}^{L} \operatorname{Res}_{z=1/x_i} \left(\frac{F(z)}{z^{N+1}} \right).$$

При этом важно выделить различную трансформацию выражения для различных и одинаковых x_i:

$$G(N,L)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{L}\dfrac{x_i^{N+L-1}}{\prod\limits_{i\neq j}(x_i-x_j)}, & x_i\neq x_j,\\ x^N\dbinom{N+L-1}{N}, & x_i=x_j.\end{cases}$$

Для выражений, связывающих элементы вектора м. о. числа требований с x_i, предлагается использовать аналитическое приближение [6]:

$$\bar{n}_i = N\cdot\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{L}x_j}.$$

Для решения обратной задачи синтеза предлагается использовать аппроксимацию средней длительности пребывания требований:

$$\bar{u}_i=\frac{1}{\mu_i}(\alpha\bar{n}_i+1),$$

где $\alpha\in(0,1)$ – параметр, аппроксимирующий переход от сети с N требованиями к $N-1$. Тогда:

$$\lambda_i=\frac{\bar{n}_i}{\bar{u}_i}=\frac{\bar{n}_i\mu_i}{\alpha\bar{n}_i+1},\quad x_i=\frac{\lambda_i}{\mu_i}=\frac{\bar{n}_i}{\alpha\bar{n}_i+1},\ i=1,\ldots,L.$$

Таким образом, x_i становится функцией от заданного $\bar{n}_i$ и единственного параметра α. Задача синтеза сети с оптимальными потоками сводится к задаче минимизации отклонения между фактическим средним числом требований $\bar{n}=(\bar{n}_i)$, вычисленным по приближению из [5], и заданным вектором $\hat{n}=(\hat{n}_i)$:

$$\varepsilon(\alpha)=\sum_{i=1}^{L}\left(\hat{n}_i-\frac{Nx_i(\alpha)}{\sum_{j=1}^{L}x_j(\alpha)}\right)^2,\ \text{где}\ x_i(\alpha)=\frac{\bar{n}_i}{\alpha\bar{n}_i+1}.$$

Значения вектора относительных интенсивностей потоков требований в системы сети обслуживания получаются из выражения:

$$\omega_i=\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{L}\lambda_j},\quad i=1,\ldots,L.$$

Для проверки применимости метода был проведен численный эксперимент с сетью массового обслуживания, состоящей из $L=3$ систем обслуживания, $N=5$ требований, вектором интенсивностей обслуживания $\mu=(2.0, 1.5, 1.0)$, а также был задан целевой вектор м. о. числа требований в системах $\hat{n}=(2.0, 1.5, 1.5)$. В результате эксперимента был получен вектор оптимальных относительных интенсивностей потоков в системы сети

$$\omega=(0.5149, 0.2911, 0.194),$$

при котором характеристики сети соответствуют заданным, т. е

$$\bar{n}=(1.994, 1.503, 1.503).$$

Численные эксперименты с другими параметрами сети обслуживания показали, что метод обеспечивает точность до 10^{-2} при сравнении с заданными значениями вектора. При увеличении числа требований и систем в сети отклонение от целевых значений вектора м. о. числа требований в системах не превышает 10%.

Разработанный метод синтеза оптимальных параметров может быть использован для решения задач проектирования дискретных стохастических систем с сетевой структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М. : Техносфера, 2003. 512 с.
2. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М. : Наука, ГРФМЛ, 1989. 336 с.
3. *Митрофанов Ю. И.* Синтез сетей массового обслуживания. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1995. 164 с.
4. *Gordon W. J., Newell G. F.* Closed queuing systems with exponential servers // Operations Research. Vol. 15. N 2. 1967. P. 254-265.
5. *Герасимов А. И.* Интегральный метод расчета замкнутых сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. № 2. С. 96-108.
6. *Митрофанов Ю. И.* Метод синтеза замкнутых сетей массового обслуживания с экспоненциальным распределением длительностей обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2002. № 1. С. 77-84.