

ТРИВИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ СОТРУДНИКОВ ПРЕДПРИЯТИЯ

Л. В. Грахольская, С. А. Илларионов, Е. В. Якубович, А. О. Мантуров

Поволжский институт управления – филиал РАНХиГС, Саратов, Россия
E-mail: graholskaya1v@gmail.com, manturov1970@yandex.ru

В работе представлена феноменологическая модель изменения во времени численности работников предприятия в зависимости от удельной трудовой нагрузки и величины оплаты труда. Модель построена в предположении фиксированного фонда оплаты труда и общего объёма выполняемых работ. Формализация модели представляет дискретное отображение, где номер итерации соответствует дискретному моменту времени. В предложенной модели учитывается влияние изменения удельной рабочей нагрузки на вероятность спонтанного увольнения работника. Рассмотрено влияние введения «стимулирующей» надбавки оплаты труда на динамику численности персонала. Определены неподвижные точки модели и соответствующие им наборы управляющих параметров

TRIVIAL MODEL OF THE NUMBER OF EMPLOYEES DYNAMICS

L. V. Grakholskaya, S. A. Illarionov, E. V. Yakubovich, A. O. Manturov

This paper presents a model for the temporal evolution of an enterprise workforce depending on the specific workload and wage level. The model is constructed under assumption of a fixed wage fund and a fixed total volume of work performed. The formalization of the model represents a discrete map, where the iteration number corresponds to discrete time. The proposed model takes into account the impact of changes in specific workload on the probability of spontaneous employee dismissal. The impact of introducing an «incentive» wage premium on the dynamics of the number of employees is considered also. Fixed points of the model and corresponding sets of control parameters has been determined

Устойчивое функционирование любого предприятия определяется стабильностью его кадрового обеспечения. В свою очередь, кадровый состав неизбежно подвержен различным динамическим изменениям – спонтанному (по собственному желанию) увольнению персонала по причинам неудовлетворённости условиями труда или его оплаты, принудительному увольнению по инициативе работодателя, обратимым вариациям численности из-за заболеваний (временная нетрудоспособность), плановых или внеплановых отпусков и т.д.

Вне зависимости от каждой из конкретных вышеназванных причин такие колебания численности сотрудников приводят к перераспределению удельной нагрузки на работников, добровольному или принудительному изменению их трудовых ролей и штатных возложенных обязанностей, и, как результат, во многих случаях оказывают существенное влияние на дальнейшую деятельность как отдельных оставшихся работников, так и предприятия в целом. Отмеченные процессы в своей совокупности, очевидно, могут образовывать специфические положительные и отрицательные обратные связи, оказывая непосредственное вли-

яние на вероятность спонтанного увольнения сотрудников. В связи с этим важным оказывается возможность оценок дальнейшего развития кадровой ситуации, которые, очевидно, затруднительно получить без предварительного моделирования. Таким образом, целью настоящей работы является построение и предварительный анализ динамической модели, позволяющей путём численных экспериментов предсказывать развитие кадровой ситуации предприятия с учётом указанных выше процессов кадрового дрейфа.

Рассмотрим особенности построения математических моделей, описывающих динамику численности сотрудников предприятия и особенности изменения их заработной платы. Для начала построим простейшую модель, учитывающую наличие фиксированного фонда оплаты труда (ФОТ) и общего объёма рабочей нагрузки предприятия. Будем использовать феноменологический подход, традиционно используемый для моделирования задач, в которых сложно или вовсе невозможно применить точные количественные соотношения для описания наблюдаемых явлений [1-4].

Целый ряд исследований статистики кадрового дрейфа подтверждает, что во многом спонтанные увольнения обусловлены неудовлетворённостью уровнем заработной платы, либо оценки (что, в известном смысле, эквивалентно) уровня своих доходов относительно желаемой величины [5]. Это позволяет предположить, что материальное вознаграждение играет решающую роль при выборе сотрудниками модели дальнейшего трудового поведения [6]. В связи с этим, далее уровень оплаты труда, формализованный до конкретного значения заработной платы или же дохода от выполняемой деятельности, в настоящей работе будем рассматривать как единственный параметр, влияющий на трудовое поведение работника.

Построим модель, описывающую детерминированное изменение численности сотрудников предприятия. Предположим, что численность изменяется дискретно во времени и её значение в данный момент $(i+1)$ времени зависит от значения в предыдущий момент времени i , от значения удельной рабочей нагрузки и от параметра, суть которого определим как «степень удовлетворённости уровнем оплаты труда» [7]:

$$m_{i+1} = f(m_i, g_i, S_i) \quad (1)$$

Здесь m_i - количество сотрудников в i -й момент времени, g_i – удельная рабочая нагрузка (в расчёте на одного сотрудника), S_i – заработная плата сотрудника, дискретное время i соответствует заданным календарным периодам (месяц, квартал, год).

В соответствии с предположениями (1) запишем:

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= m_i + v - \lambda g_i / \\ & S_i, \\ S_i &= S / m_i, \\ g_i &= Q_0 / m_i \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь λ – коэффициент, учитывающий переход от размерности количества человек к размерности коэффициента «степени удовлетворённости уровнем оплаты труда», Q_0 – общий объём рабочей нагрузки, v – фиксированный приём

на работу в течение данного дискретного момента времени, в предположении, что рекрутинг осуществляется из неограниченного резервуара.

После преобразований получим выражение для модели в окончательном виде:

$$m_{i+1} = m_i - \lambda Q_i / S_0 + v \quad (3)$$

где $S_0 = m_i S$.

Таким образом, построенная модель представляет собой дискретное одномерное отображение [8-10]. Для дальнейшего изучения задачи целесообразно провести нормировку модели. Для целей нормировки положим, что m_0 – начальное (или же оптимальное в заданном смысле) количество сотрудников, $A = Q_0/S_0$ – оптимальное в заданном смысле соотношение «удельная нагрузка – величина оплаты труда» (данный параметр может быть найден, например, при проведении статистического анализа результатов соответствующего опроса), $Q_0 = Q/m_0$, нормированное число сотрудников $\mu_i = m_i/m_0$, нормированная скорость приема на работу $v_i = v/m_0$. Выполнив подстановки, получаем выражение вида

$$\mu_{i+1} = \mu_i + v_i - (\lambda A S_0/S) / \mu_i$$

или же, после введения нового обозначения

$$\mu_{i+1} = \mu_i + v_i - C_0/\mu_i \quad (4)$$

Рассмотрим особенности поведения модели. Найдём неподвижную точку, т.е. такой набор параметров, при котором число сотрудников не изменяется в течение одного периода времени наблюдения:

$$m_i = m_{i+1}$$

Отсюда следует, что если

$$m_i = m_i - \lambda Q_i / S_0 + v$$

то

$$v = \lambda Q_i / S_0$$

в нормированных переменных получим, что

$$\mu_i = \mu_i + v_i - C_0/\mu_i,$$

$$0 = \mu_i v_i - C_0$$

то есть равновесному состоянию модели соответствует постоянный фиксированный прием на работу со скоростью $v_i = C_0 / \mu_i$, при котором реализуется неподвижная точка $\mu_0 = C_0/v$. В размерных переменных указанная величина равна $V = \alpha A (m_0/m_i) (S_0/S)$. Как можно видеть, скорость набора (приема) на работу зависит от:

- 1) начального («оптимального») количества сотрудников;
- 2) соотношения величин «оптимальная оплата труда – реальная оплата труда», скорость тем больше, чем меньше реальная заработная плата сотрудников;
- 3) числа сотрудников, оставшихся работать на предприятии в данный момент времени. Реализуется компенсирующий набор сотрудников на работу.

В общем же, поведение указанной модели описывает типичную картину постоянной «утечки» кадров, неудовлетворенных уровнем своего материального положения. В случае отсутствия приёма на работу новых сотрудников модель демонстрирует неустойчивое поведение («вековая неустойчивость», [8,10]), при котором уменьшение числа работников увеличивает удельную рабочую нагрузку, что, в свою очередь приводит к ещё большему оттоку кадров.

В настоящее время как альтернатива системе фиксированной оплаты труда рассматривается введение «регулируемой» доплаты к основной заработной плате, так называемая «стимулирующая надбавка». В соответствии с различными предположениями, указанная надбавка должна зависеть от объёма выполненной работы, досрочного выполнения этой работы, качества выполненной работы. Рассмотрим, как будет влиять такая стимулирующая надбавка на динамику численности работников. Для этого, по методике аналогично ранее рассмотренной, построим математическую модель, в которой учтём зависимость величины стимулирующей надбавки от удельной нагрузки. Пусть величина стимулирующей надбавки линейно зависит от удельной нагрузки сотрудника:

$$S_{sti} = \beta g_i = \beta Q/m_i$$

Коэффициент β задаёт связь величины стимулирующей надбавки и значения величины удельной рабочей нагрузки.

В соответствии со сделанными предположениями, зависимость количества сотрудников от дискретного времени запишем следующим образом:

$$m_i = m_i - \lambda Q/m_i (m_i/S_0 + \beta Q/m_i) + v = m_i + v - c_1 - c_2/m_i^2 \quad (5)$$

Здесь константы c_1 и c_2 соответственно равны:

$$c_1 = \lambda Q/m_i, \quad c_2 = \lambda \beta Q^2$$

Также, как и ранее, для (5) найдём неподвижную точку, соответствующую неизменному во времени количеству сотрудников.

$$m_i^3 = m_i^3 + m_i^2(v - c_1) - c_2$$

Решение данного уравнения относительно m_i свяжет количество постоянно пребывающих сотрудников в момент времени i с константами c_1 и c_2 , а также со скоростью приёма на работу новых сотрудников v :

$$m_i^2 = c_2/(v - c_1)$$

Посмотрим, возможно ли удержать на работе с данными условиями труда (объёмом рабочей нагрузки и величиной заработной платы) постоянное количество сотрудников при помощи только стимулирующей надбавки, т.е. при $v=0$. Из (5) получим:

$$m_{i+1} = m_i - c_1 - c_2/m_i^2, \\ - c_1 - c_2/m_i^2 = 0$$

Как видно, получено нефизическое решение, не имеющее в данной задаче смысла. Это означает отрицательный ответ на поставленный вопрос.

Таким образом, в работе построена динамическая модель, описывающая изменение числа сотрудников организации во времени, в зависимости от вели-

чины рабочей нагрузки и заработной платы. Модель позволяет наблюдать процесс «утечки» кадров, а также изучить влияние на этот процесс величин удельной рабочей нагрузки и заработной платы. Несложная модификация модели позволяет изучить действие вводимой стимулирующей надбавки к заработной плате. Показано, что в рамках сделанных допущений стимулирующая надбавка, линейно зависящая от удельной рабочей нагрузки, не может стабилизировать численность сотрудников предприятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Форрестер Д.* Основы кибернетики предприятия. М. : Прогресс, 1971. 340 с.
2. *Форрестер Д.* Мировая динамика. М. : Наука, 1978. 384 с.
3. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2001. 320 с.
4. *Махов С. А.* Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера. Препринт. ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Москва, 2005. [Электронный ресурс]. URL: https://www.keldysh.ru/papers/2005/rep06/rep2005_06.html (дата обращения: 20.08.2025).
5. Названы главные причины увольнения россиян. Режим доступа: <https://www.rbc.ru/life/news/674da0639a794705f1603a02> дата обращения 01.08.2025 г.
6. РБК. Официальный сайт. Россияне назвали уровень зарплаты бедности, богатства и ощущения счастья. [Электронный ресурс]. URL: https://www.rbc.ru/society/16/10/2025/68ef63c39a7947f347cc7dae?from=from_main_4 (дата обращения: 16.10.2025).
7. *Костина А. Н.* Удовлетворенность трудом персонала производственного предприятия с учетом особенностей трудовой миграции // Гуманитарные, социально-экономические и общественные науки. 2025. № 1. С. 28-36.
8. *Рабинович М. И.* Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. 3-е изд. Ижевск : Науч.-изд-кий центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
9. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М. : ГИЗ ФИЗМАТЛИТ, 2006. 356 с.
10. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. Изд. 2-е. М.: ЛЕНАНД, 2020. 352 с.