# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

**Н. Е. Тимофеева, И. Е. Тананко**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия*
E-mail: timofeevane@yandex.ru, tanankoie@info.sgu.ru

В качестве математической модели вычислительной системы с параллельной обработкой информации предлагается использовать систему массового обслуживания с делением и слиянием требований. В систему поступает требование и разделяется на заданное число фрагментов только в том случае, когда в системе обслуживания имеется необходимое число свободных приборов. Длительность обслуживания фрагментов приборами является равномерно распределенной случайной величиной. После завершения обслуживания последнего фрагмента, все фрагменты мгновенно объединяются в требование, которое покидает систему обслуживания. Получены выражения для определения математических ожиданий длительности пребывания требования в системе обслуживания и числа занятых приборов в этой системе.

# MATHEMATICAL MODEL OF COMPUTING SYSTEM WITH PARALLEL PROCESSING

**N. E. Timofeeva, I. E. Tananko**

As a mathematical model of a computer system with parallel processing, it is proposed to use a fork/join queue. The incoming customer is divided into a specified number of fragments when the queue has the required number of free nodes. Service time of fragments is uniformly distributed random value. After the last fragment is serviced, all fragments are instantly combined into a customer. Then the customer leaves the queue. An analytical expression of the average sojourn time and number busy of nodes is derived.

Развитие теории и методов анализа систем массового обслуживания способствовало успешному решению ряда задач, связанных с анализом и оптимизацией вычислительных сетей и составляющих их элементов [1, 2]. Появление многопроцессорных вычислительных систем, систем многопутевой маршрутизации и других систем с параллельной обработкой информации привело к необходимости построения математических моделей таких систем [3]. В настоящее время такие модели получили название систем массового обслуживания с делением и слиянием требований.

В данной работе рассматривается вычислительная система, имеющая возможность выполнения параллельных вычислений. От пользователя в вычислительную систему поступает заявка (задача) на выполнение вычислений. Пусть вычислительная система имеет достаточно большое число процессоров, поэтому будем считать, что вновь поступившая задача мгновенно разделяется на необходимое число подзадач и сразу получает необходимое для обслуживания число свободных процессоров.

Каждая подзадача выполняется процессорами независимо от других подзадач. Считаем, что длительность выполнения подзадачи является непрерывной равномерно распределенной случайной величиной.

После завершения обслуживания результаты выполнения подзадач записываются в память ВС, где находятся до завершения обработки всех подзадач.

Задача считается решенной, когда будет произведен анализ результатов всех подзадач.

Полагаем, что длительность обработки результатов всех подзадач намного меньше по сравнению с длительностью выполнения любой из подзадач, поэтому этой длительностью в модели будем пренебрегать.

Отобразим в математической модели основные элементы, связи между элементами, а также алгоритмы функционирования элементов вычислительной системы:

– задача, требующая выполнения вычислительной системой – требование;

– подзадачи (потоки) – фрагменты требования. Все фрагменты требования будем считать принадлежащим одному классу;

– процессоры вычислительной системы – обслуживающие однородные приборы;

– процессор, выполняющий функции разделения вычислительной задачи на подзадачи – точка разделения требования на фрагменты;

– процессор и память, используемые для анализа результатов выполнения подзадач и выдачи ответа – точка объединения фрагментов в требование;

– длительность выполнения подзадач процессорами – равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[a, b]$, где $a > 0$ и $b > 0$ зависят от быстродействия процессоров и количества операций в подзадачах;

– длительность времени разделения задачи на подзадачи будем считать нулевой;

– длительность времени анализа всех выполненных подзадач в окончательный результат будем считать нулевой.

Таким образом, вычислительную систему в математической модели представим системой массового обслуживания с делением и слиянием требований. Из источника в систему обслуживания поступает требование только в случае наличия в этой системе необходимого числа свободных приборов. Тогда требование разделяется на заданное число фрагментов, которые занимают свободные приборы и начинают обслуживаться. После завершения обслуживания фрагмент освобождает прибор и переходит в точку сбора фрагментов. После завершения обслуживания последнего из фрагментов, фрагменты мгновенно объединяются в требование, которое возвращается в источник.

Требуется определить математическое ожидание длительности пребывания требования в рассматриваемой системе массового обслуживания с делением и слиянием требований.

Обозначим $N$ – число фрагментов, на которые разделяется требование, $N \geq 2$. Пусть длительность обслуживания $i$-го фрагмента требования,

$i = 1, ..., N,$ есть непрерывная равномерно распределенная случайная величина $X$.

Выбор непрерывной равномерно распределенной случайной величины в качестве параметра длительности обслуживания фрагмента обусловлен, как правило, небольшим диапазоном времени выполнения родственных подзадач вычислительной машиной, функционирующей в неизменной окружающей среде. Поэтому моменты завершения выполнения подзадач внутри интервала времени считаем равновероятными.

Поскольку все фрагменты требования, по условию задачи, начинают обслуживаться одновременно и завершение обслуживания требования совпадает по времени с моментом завершения обслуживания самого последнего фрагмента, то длительность обслуживания требования есть максимум из $N \geq 2$ случайных величин $X$. В этом случае функция распределения и функция плотности распределения случайной величины $X_N$ на отрезке [0, 1] соответственно имеют вид [4]:

$$F_{X_N}(x) = (F_X(x))^N = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x^N, 0 \leq x < 1, \\ 1, x \geq 1, \end{cases}$$

$$f_{X_N}(x) = (F_X(x))' = \begin{cases} 0, x < 0, \\ Nx^{N-1}, 0 \leq x < 1, \\ 0, x \geq 1. \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание (м. о.) случайной величины $X_N$ и, следовательно, м. о. длительности пребывания требования в системе обслуживания определяется из выражения

$$E(X_N) = a + (b-a)N\int_0^1 xx^{N-1}dx = a + (b-a)\frac{N}{N+1}.$$

Заметим, что при $N \to \infty$ $E(X_N) \to b$.

Используя выражение для $E(X_N)$, определим м. о. числа $h$ занятых приборов в системе обслуживания

$$E(h) = \sum_{k=1}^{N} kP(k),$$

где $P(k)$ – вероятность того, что в системе обслуживания занято $k$ приборов,

$$P(1) = P(2) = ... = P(N-1) = \frac{1}{E(X_N)}\frac{b-a}{(N+1)}, \quad P(N) = \frac{a}{E(X_N)} + P(N-1).$$

Тогда, очевидно

$$E(h) = \frac{Na}{E(X_N)} + \frac{N(b-a)}{2E(X_N)} = \frac{N(a+b)}{2E(X_N)}.$$

Результаты исследования зависимостей $E(X_N)$ и $E(h)$ от числа $N$ при $a=2$ и $b=4$ представлены в табл.

**Зависимость $E(X_N)$ и $E(h)$**
**от числа фрагментов требования**

| $N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $E(X_N)$ | 3,33 | 3,6 | 3,71 | 3,78 | 3,82 |
| $E(h)$ | 1,8 | 3,33 | 4,85 | 6,35 | 7,86 |

Видно, что при увеличении $N$ величина $E(X_N)$ асимптотически стремится к верхней границе длительности выполнения подзадачи, т. е. $b=4$.

Дальнейшее исследование может быть связано с разработкой метода анализа сети массового обслуживания с делением и слиянием требований в отдельных системах обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей М. : Техносфера, 2003. 512 с.

2. *Сущенко С. П.* Математические модели компьютерных сетей. Томск : Изд-во «Издательский дом Томского государственного университета, 2017. 271 с.

3. *Thomasian A.* Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys. 2014. Vol. 47. No. 2.

4. *Венцель Е. С., Овчаров А.* Теория вероятностей и её инженерные приложения. М. : Высш. школа, 2000. 480 с.