

КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЕЛОВОГО ЦИКЛА

Ю. И. Хритина

Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, Россия
E-mail: xrxjulechka99@mail.ru

Рассматривается математическая модель делового цикла, предложенная В. Чангом и Д. Смитом, где деловой цикл определяется свойствами функций инвестиций и сбережений, зависящих от национального дохода и капитала. Рассмотрены равновесие и устойчивость. Исследованы коэффициентные условия существования цикла в случае логарифмических функций инвестиций и сбережений.

CLASSIFICATION OF EQUILIBRIUM STATES IN ONE BUSINESS CYCLE MODEL

Yu. I. Hritina

The mathematical model of the business cycle proposed by V. Chang and D. Smith is considered, where the business cycle is determined by the properties of investment and savings functions depending on national income and capital. Equilibrium and stability are considered. The coefficient conditions of the cycle existence in the case of logarithmic functions of investments and savings are investigated.

В. Чангом и Д. Смитом предложена динамическая модель делового цикла, которая описывает взаимодействие инвестиций и сбережений:

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha(I(Y, K) - S(Y, K)), \\ \dot{K} = I(Y, K). \end{cases} \quad (1)$$

где Y – доход, K – капитал, I – инвестиции, S – сбережения и $\alpha > 0$ – коэффициент адаптации (скорость, с которой доход реагирует на изменения соотношения между инвестициями и сбережениями). Функции $I(Y, K)$ и $S(Y, K)$ являются нелинейными и должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial I}{\partial K} \cdot \frac{\partial S}{\partial Y} < \frac{\partial I}{\partial Y} \cdot \frac{\partial S}{\partial K}, \quad \text{и} \quad \frac{\partial I}{\partial Y} < \frac{\partial S}{\partial Y} \quad (2)$$

Другие спецификации для функций $I(Y, K)$ и $S(Y, K)$ отсутствуют [1, 2].

Проведя ряд исследований, были собраны статистические данные на примере регионов Центрального федерального округа [3] за период с 2000 по 2021. При спецификации регрессионных уравнений $I = I(Y, K)$ и $S = S(Y, K)$ были предложены аддитивные и мультипликативные зависимости, а затем сгруппирована табл. регрессионных уравнений для инвестиций и сбережений (см. Табл.). [4].

Таблица 1

Регрессионные уравнения для инвестиций и сбережений

№ п/п	$I = I(Y, K)$	№ п/п	$S = S(Y, K)$
1.	$I = A_1 Y + B_1 K + C_1$	1.	$S = A_2 Y + B_2 K + C_2$
2.	$I = A_1 Y + B_1 K$	2.	$S = A_2 Y + B_2 K$
3.	$I = Y^{A_1} K^{B_1} e^{C_1}$	3.	$S = Y^{A_2} K^{B_2} e^{C_2}$
4.	$I = Y^{A_1} K^{B_1}$	4.	$S = Y^{A_2} K^{B_2}$
5.	$I = A_1 \ln Y + B_1 K + C_1$	5.	$S = A_2 \ln Y + B_2 K + C_2$
6.	$I = A_1 \ln Y + B_1 K$	6.	$S = A_2 \ln Y + B_2 K$
7.	$I = A_1 Y + B_1 \ln K + C_1$	7.	$S = A_2 Y + B_2 \ln K + C_2$
8.	$I = A_1 Y + B_1 \ln K$	8.	$S = A_2 Y + B_2 \ln K$
9.	$I = A_1 \ln Y + B_1 \ln K + C_1$	9.	$S = A_2 \ln Y + B_2 \ln K + C_2$
10.	$I = A_1 \ln Y + B_1 \ln K$	10.	$S = A_2 \ln Y + B_2 \ln K$
11.	$I = Y^{A_1} e^{B_1 K + C_1}$	11.	$S = Y^{A_2} e^{B_2 K + C_2}$
12.	$I = Y^{A_1} e^{B_1 K}$	12.	$S = Y^{A_2} e^{B_2 K}$
13.	$I = e^{A_1 Y + C_1} K^{B_1}$	13.	$S = e^{A_2 Y + C_2} K^{B_2}$
14.	$I = e^{A_1 Y} K^{B_1}$	14.	$S = e^{A_2 Y} K^{B_2}$
15.	$I = e^{A_1 Y + B_1 K + C_1}$	15.	$S = e^{A_2 Y + B_2 K + C_2}$
16.	$I = e^{A_1 Y + B_1 K}$	16.	$S = e^{A_2 Y + B_2 K}$

Используя различные комбинации функций инвестиций и сбережений, получаем 4 варианта системы $\begin{cases} I(Y, K) = 0, \\ S(Y, K) = 0 \end{cases}$, решение которых представлено в табл.

Таблица 2

Состояния равновесия системы (1)

№	Вид системы (4)	Координаты состояния равновесия (Y_0, K_0)	Условия существования
1	$\begin{cases} A_1 \ln Y + B_1 K + C_1 = 0, \\ A_2 \ln Y + B_2 K + C_2 = 0. \end{cases}$	$\left(e^{\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}}, \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \right)$	$A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0,$ $\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} > 0$
2	$\begin{cases} A_1 Y + B_1 \ln K + C_1 = 0, \\ A_2 Y + B_2 \ln K + C_2 = 0. \end{cases}$	$\left(\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, e^{\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}} \right)$	$A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0,$ $\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} > 0$
3	$\begin{cases} A_1 \ln Y + B_1 K + C_1 = 0, \\ A_2 Y + B_2 \ln K + C_2 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{C_1}{B_1} - \frac{A_1}{B_1} \ln Y = e^{\frac{-C_2 - A_2 Y}{B_1}} \\ K = -\frac{C_1}{B_1} - \frac{A_1}{B_1} \ln Y \end{cases}$	$0 < Y < e^{-\frac{C_1}{A_1}}$
4	$\begin{cases} A_1 Y + B_1 \ln K + C_1 = 0, \\ A_2 \ln Y + B_2 K + C_2 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{C_2}{B_2} - \frac{A_2}{B_2} \ln Y = e^{\frac{-C_1 - A_1 Y}{B_2}} \\ K = -\frac{C_2}{B_2} - \frac{A_2}{B_2} \ln Y \end{cases}$	$0 < Y < e^{-\frac{C_2}{A_2}}$

Таким образом, можно классифицировать состояния равновесия следующим образом:

1. Всегда существует продуктивное состояние равновесия
2. Состояние равновесия существует при ограничениях
3. Существует множество пучкообразных линий

Пример. Пусть функции инвестиций и сбережений имеют вид (рис. 1)

$$I(Y, K) = 0,99 \ln Y - 0,22K + 0,102; \quad S(Y, K) = 0,22 \ln Y + 0,6K - 0,04.$$

Тогда система (1) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha(0,77 \ln Y - 0,82K + 0,142), \\ \dot{K} = 0,99 \ln Y - 0,22K + 0,102. \end{cases} \quad (4)$$

Ее состояние равновесия $(Y_0, K_0) = (0,9217; 0,0966)$. Подберем $\alpha = 0,2633$. Тогда собственные значения матрицы линейного приближения в окрестности состояния равновесия $(Y_0, K_0) = (0,9217; 0,0966)$ равны $\lambda_{1,2} = \pm 0,4284i$ [4]. Фазовый портрет и некоторые фазовые траектории системы (4) представлены на рис. 2, а траектории решений – на рис. 3.

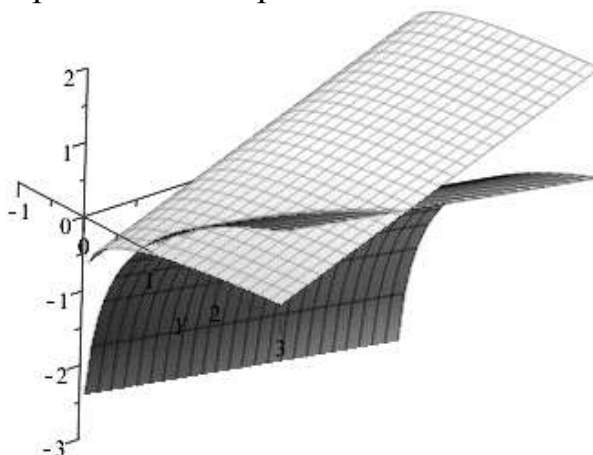


Рис. 1. Графики функций инвестиций и сбережений

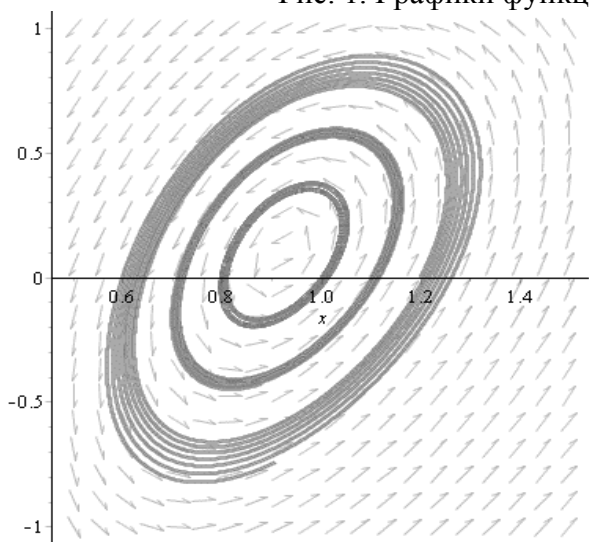


Рис. 2. Фазовый портрет системы (4)

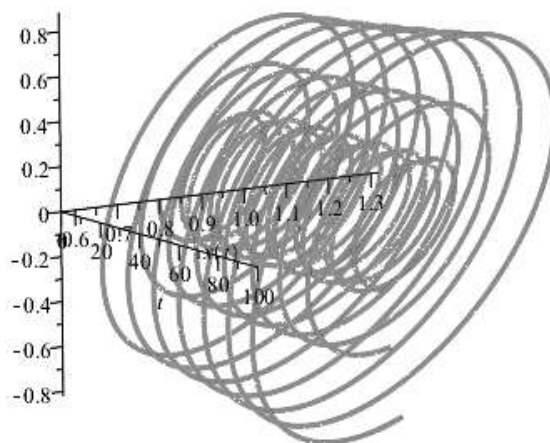


Рис. 3. Траектории решений системы (4)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chang W. W., Smyth D. J.* The Existence and Persistence of Cycles in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined // *The Review of Economic Studies*. 1971. Vol. 38. № 1. P. 37-44.
2. *Kaldor N.* A Model of the Trade Cycle // *The Economic Journal*. 1940. Vol. 50. № 197. P. 78-92.
3. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2010-2023 гг. // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 24.06.2024).
4. *Хритина Ю. И., Лискина Е. Ю.* Моделирование функций инвестиций и сбережений в одной модели делового цикла // *Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками*. 2024. Вып. 9. С. 102-104.